Mecânica e Ondas

Trabalho de Laboratório

Conservação da Energia Mecânica da Roda de Maxwell

Objectivo

Determinação do momento de inércia da roda de Maxwell. Estudo da transferência de energia potencial em energia de translação e de rotação.

1. Introdução

O sistema a estudar está ilustrado nas fotos da figura 1 e consiste numa roda suspensa

Figure 1: Foto da montagem a utilizar

por dois fios enrolados e que ao ser largada irá cair desenrolando os fios do seu eixo. No fundo esta montagem ilustra o princípio de operação do bem conhecido brinquedo infantil "iô-iô". A roda está inicialmente travada por uma ponta metálica que ao soltar a roda irá accionar um cronómetro para medir o tempo de queda. No fim do percurso a roda cortará o feixe luminoso do sistema de cronómetro/célula fotoeléctrica (Lb) que fará parar a contagem do tempo. Este sistema Lb pode também medir a velocidade “instantânea” da roda ao cortar o feixe luminoso.

Alterando a posição do sistema Lb podemos medir o tempo que a roda demora a cair uma determinada distância e a velocidade que esta atinge nessa posição.

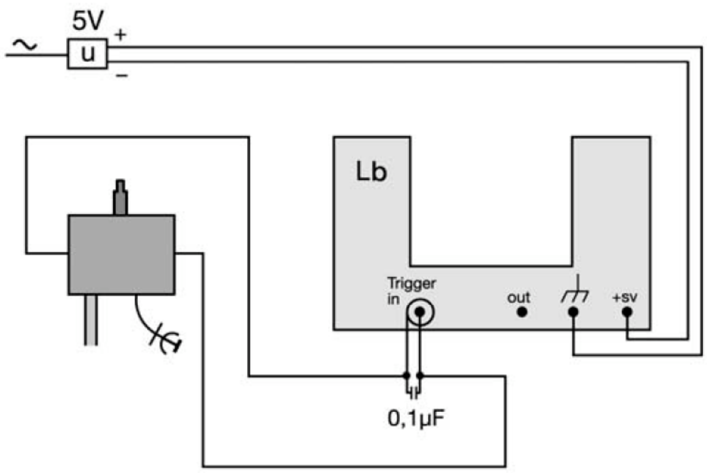

Figura 2: Esquema da ligação do sistema cronómetro/célula fotoeléctrica (Lb)

1.1 Transferência de energia na queda

A energia total E do disco de Maxwell pode ser expressa como a soma da energia potencial (E_p), energia cinética de translação (E_T) e energia cinética de rotação (E_r). Se o disco tiver a massa m e o momento de inércia I_z no seu eixo de rotação, podemos escrever as seguintes igualdades:

$$E = E_p + E_T + E_r = m \cdot \vec{g} \cdot \vec{s} + \frac{m}{2}\vec{v}^2 + \frac{I_z}{2}\vec{\omega}^2 \qquad (1)$$

onde $\vec{\omega}$ representa a velocidade angular, $\vec{v}$ é a velocidade de translação, $\vec{g}$ é a aceleração da gravidade e $\vec{s}$ é a altura (negativa).

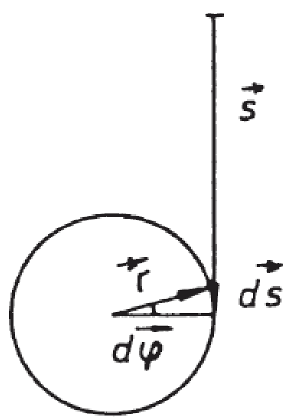

Figura 3: Relação entre a variação angular $d\vec{\varphi}$ e a diminuição da altura $d\vec{s}$ na roda de Maxwell.

Como a relação entre a variação do ângulo $\vec{\varphi}$ e a altura da roda é dado pelo raio $\vec{r}$ do eixo da roda de Maxwell onde os fios estão enrolados (ver Figura 3)

$$d\vec{s} = d\vec{\varphi} \times \vec{r} \tag{2}$$

e

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{3}$$

Neste caso $\vec{g}$ é paralelo a $\vec{s}$ e $\vec{\omega}$ é perpendicular a $\vec{r}$, e portanto o produto interno $\vec{g} \cdot \vec{s}$ e o módulo do produto externo $|\vec{v}| = |\vec{\omega} \times \vec{r}|$ (eq. 3) podem escrever-se da forma

$$\begin{aligned} \vec{g} \cdot \vec{s} &= -g\, s \\ |\vec{v}| &= \omega\, r \end{aligned} \tag{4}$$

Energia total do sistema definida em (1) toma a forma

$$E = -m\, g\, s(t) + \frac{1}{2}\left(m + I_z/r^2\right)\left(v(t)\right)^2 \tag{5}$$

Como de acordo com o "*princípio da conservação da energia*" a energia total E é constante ao longo do tempo, a sua derivada em ordem ao tempo tem de ser nula:

$$\frac{dE}{dt} = 0 = -m\, g\, \frac{ds(t)}{dt} + \left(m + I_z/r^2\right) v(t)\, \frac{dv(t)}{dt}. \tag{6a}$$

ou seja

$$0 = -m\, g\, \frac{ds(t)}{dt} + \left(m + I_z/r^2\right) \frac{ds(t)}{dt}\, \frac{d^2 s(t)}{dt^2} \tag{6b}$$

A equação do movimento *s(t)* pode ser obtida da eq. (6b). Para tal basta pensar que para satisfazer a eq. (6b) *s*(*t*) tem de ser escrever da forma $s(t) = at^2 + bt + c$. Sabendo que as condições *t=0* são $s(0) = 0$ *e* $v(0) = 0$ podemos obter

$$s(t) = \frac{1}{2} \frac{m\, g}{m + I_z/r^2} t^2 \tag{7}$$

e

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{m\, g}{m + I_z/r^2} t \tag{8}$$

Na montagem da Figura 1 a massa *m* da roda de Maxwell é *m = 0.436 kg* e o raio seu eixo *r* é *r = 2.5 mm.*

Da equação (7) pode ser utilizada para determinar o momento de inércia I_z a partir do ajuste de uma função tipo $Y = A\ X^B$ aos pontos definidos por um conjunto de pares de valores $(Y, X) = (s, t)$ como no exemplo da Figura 4.

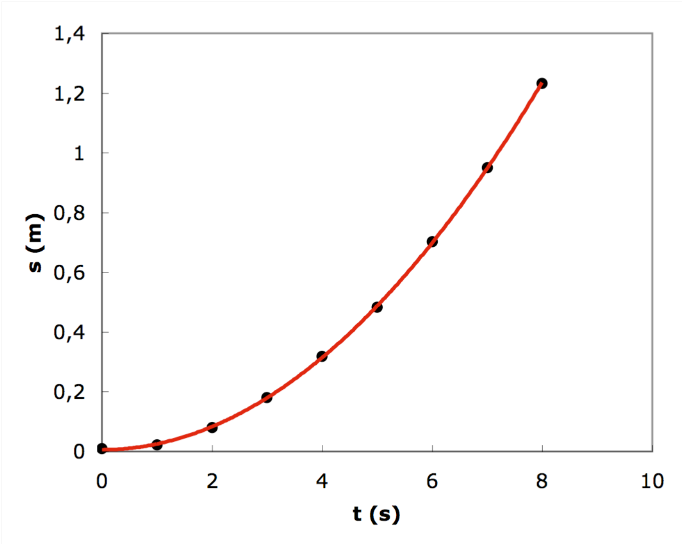

Figura 4: Variação de s com t. Recta obtida por ajuste segundo o ***método dos mínimos quadrados***

Sabendo o momento de inércia I_z com a equação (8) podemos determinar a velocidade de translação da roda em função do tempo (ver Figura 5).

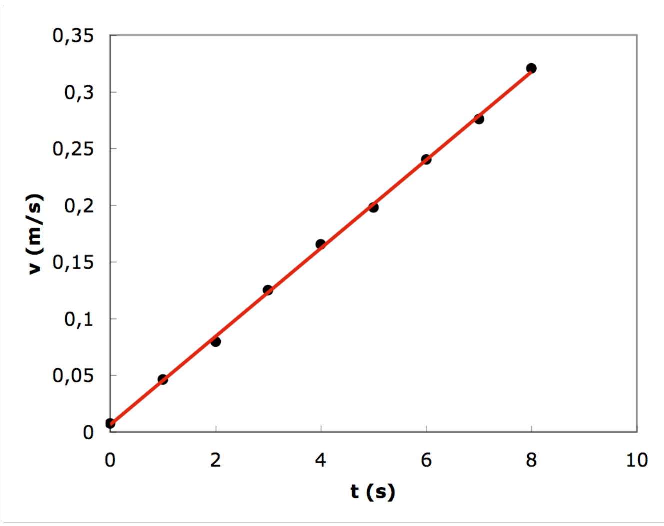

Figura 5: Variação da v com t. Recta obtida pela equação (8)

Analisando em termos dos vários tipos de energia envolvidas temos que energia potencial $E_p = m \cdot \vec{g} \cdot \vec{s}$ vem em função do tempo da pela posição da roda ao longo do tempo *s*(t) (ver Figura 6).

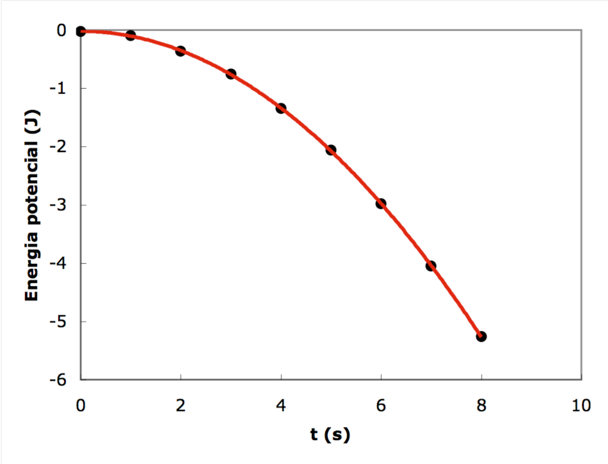

Figura 6: Variação da energia potencial E_p com t.

Por sua vez a energia de translação E_T pode ser obtida a partir da velocidade ao longo do tempo (ver Figura 7).

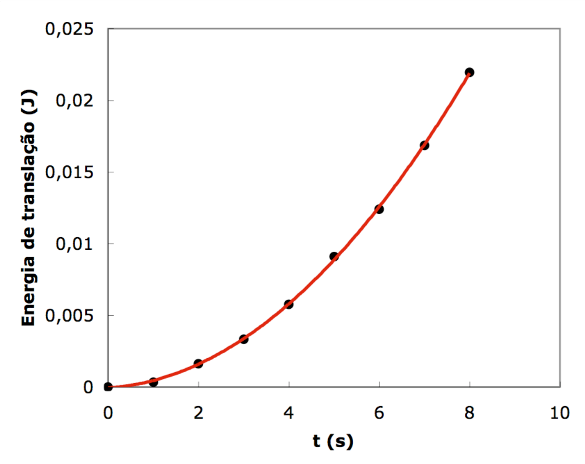

Figura 7: Variação da energia de translação E_T com t.

Subtraindo uma à outra obtemos a energia de rotação E_r (ver Figura 8).

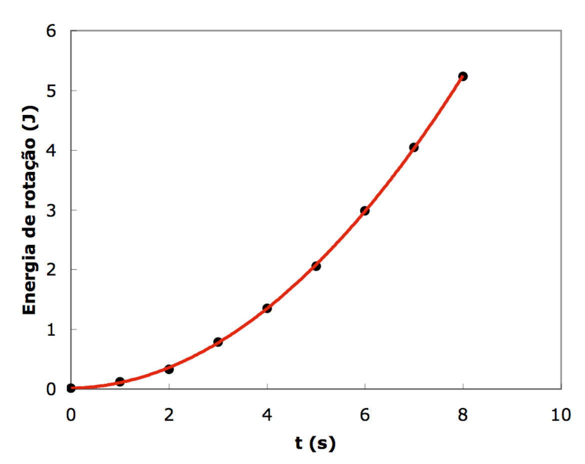

Figura 8: Variação da energia de rotação E_r com t.

Comparando a Figura 8 com a Figura 6 podemos verificar que praticamente toda a energia potencial é convertida em energia de rotação. Porque será?

2. Trabalho experimental

1) Para o trabalho experimental convém verificar a seguinte lista de material:
   1. Uma roda de Maxwell de 436g
   2. Uma barra com escala graduada e cursores
   3. Ponta de travamento com disparo
   4. Um condensador de 0.1 microF
   5. Sistema de cronómetro/célula fotoeléctrica (Lb)

2) Usando o parafuso de ajuste na barra de sustentação da roda de Maxwell deve certificar que o eixo da roda está perfeitamente na horizontal para que ao rodar a roda no sentido ascendente os fios enrolem de fora para dentro. A densidade dos fios enrolados deve ser igual em ambos os lados. Este alinhamento é critico pois caso não esteja bem afinado existe uma forte tendência da roda se soltar partindo os fios e muito possivelmente danificar a montagem.
3) A ponta de travamento, ou seja a ponta metálica que é introduzida num dos buracos existentes na parte exterior da roda, é utilizado para soltar mecanicamente a roda de Maxwell e activar o contador dos sistema de cronómetro/célula fotoeléctrica (Lb) aquando das medições de distancia versus tempo. A ponta de travamento deve ser ajustada por forma que a roda não oscile ou role a seguir de ser solta. Sendo assim os fios devem desenrolar sempre no mesmo sentido quando a roda é largada.
4) Verificar que o sistema de cronómetro/célula fotoeléctrica (Lb) se encontra bem posicionado por forma que a roda de Maxwell ao descer passe com um dos lados do seu eixo no meio do garfo cortando o feixe de luz.
5) A barra com escala graduada e cursores deve estar posicionada o mais próximo do percurso da roda mas sem que os seus cursores estejam no caminho desta.

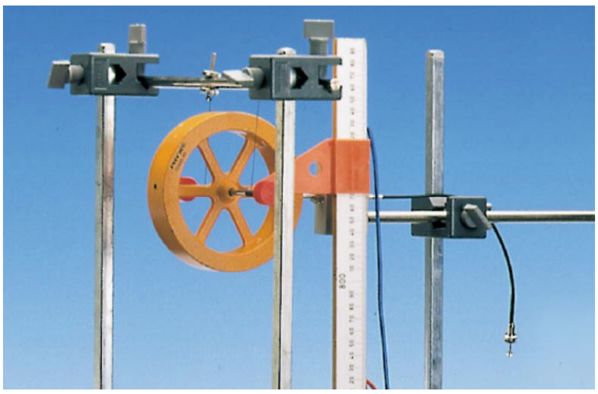

Figura 9: Foto do enrolamento no eixo da roda de Maxwell

2.1 Determinação do momento de inércia da roda

1) Efectue a medição do tempo de queda para um conjunto de 10 posições (por exemplo de 5 em 5 cm).
2) Ligue a ponta de travamento ao sistema de cronómetro/célula fotoeléctrica (Lb) tal como está esquematizado na Figura 2.
3) Pressione o botão de disparo (que faz soltar a roda) e bloqueio nessa posição.
4) Posicione o selector de tipo de funcionamento do sistema de cronómetro/célula fotoeléctrica (Lb) na posição
5) Pressione o Butão de "set" no sistema de cronómetro/célula fotoeléctrica (Lb)
6) Solte o botão de disparo e a ponta largará a roda que deverá começar a mover-se.
7) Depois da roda ter saído completamente a ponta de travamento o botão de disparo deve ser **pressionado novamente e bloqueado antes que o feixe de luz seja interrompido**.
8) O cronometro é parado assim que o eixo da roda interrompa o feixe de luz da célula fotoeléctrica.
9) A medição da distância percorrida é efectuada através da barra com escala posicionando um cursor no inicio, ao nível do eixo da roda onde ela é largada, e o outro cursor no fim, ou seja, ao nível do feixe do sistema cronómetro/célula fotoeléctrica (Lb). Tenha em atenção que para além dos ***erros sistemáticos*** que pode estar a introduzir nas medidas por causa da paralaxe no posicionamento dos cursores, comete um ***erro de leitura*** que nunca será inferior a metade da menor divisão da escala (mas pode ser superior).
10) No computador que está junto da montagem pode inserir os valores numa folha de Excel para depois gerar um gráfico XY com o conjunto de pontos experimentais e traçar uma função de ajuste do tipo "power" (potência).
11) Calcule o momento de inércia da roda de Maxwell a partir dos valores do ajuste e verifique a dependência da posição em relação ao tempo dado pela equação (7). Pode também estimar o erro propagado do declive da recta para o valor do momento de inércia.

2.2 Conservação e transferência de energia

1) Efectue a medição do tempo de passagem do eixo na queda para o mesmo conjunto de posições do ponto anterior.
2) Desligue o sinal de "Trigger In" no sistema de cronómetro/célula fotoeléctrica (Lb) (Ver Figura 2).
3) Coloque a roda na sua posição usando a ponta metálica de travamento.
4) Posicione agora o selector de tipo de funcionamento do sistema de cronómetro/célula fotoeléctrica (Lb) na posição
5) Pressione o Butão de "set" no sistema de cronómetro/célula fotoeléctrica (Lb)
6) Solte o botão de disparo e a ponta largará a roda que deverá começar a mover-se.

7) O cronometro só é accionado e logo parado quando o eixo da roda passa pelo feixe luminoso que incide na célula fotoeléctrica. O valor obtido Δt é o tempo que o eixo da roda demora a passar totalmente pelo feixe luminoso.

8) A velocidade de translação é determinada no tempo $t + \Delta t/2$ na posição de queda através de

$$v\left(t + {}^{\Delta t}\!/_{2}\right) = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

em que Δs = 5mm é a espessura do eixo da roda e t é o tempo de queda da roda obtido no ponto anterior.

9) Faça uma estimativa do erro que pode cometer nas medidas que efectuou.

10) No computador inserir os valores numa folha de Excel para depois gerar um gráfico XY com o conjunto de pontos experimentais e traçar uma função de ajuste do tipo “power” (potência) para verificar a dependência da velocidade em função do tempo dado pela equação (8). Pode também comparar os valores experimentais com a função teórica dada pela mesma equação (8) e usando o momento de inércia determinado anteriormente.

11) Com base nestes valores da velocidade e nos valores anteriores da posição em função do tempo pode calcular a variação da energia de translação e da energia de potencial em função do tempo e reproduzir os gráficos de transferência de energia das Figuras 6 a 8.

Bibliografia

- Tratamento e Apresentação de Dados Experimentais, M. R. da Silva, DF, IST, 2003
- Introdução à Física, J. Dias de Deus, M. Pimenta, A. Noronha, T. Peña, P. Brogueira, McGraw-Hill (1992).
- The Art of Experimental Physics, D. Preston, E. Dietz, John Wiley, New York, 1991.

Mecânica e Ondas

Relatório
(destaque para entregar no fim da aula ao docente)

Conservação da Energia Mecânica da Roda de Maxwell

Nº	Nome	Curso

Data	Turno	Grupo

1. Objectivo deste trabalho:

2 Determinação do momento de inércia da roda

X = *t* (s)	Y = *s* (m)	Erro *s* (m)

2.1 Determine os parâmetros de ajuste à função do tipo $Y = A \cdot X^B$ aos pontos experimentais:

A = ____________________ ; B = _______________________

2.2 Determine o valor do momento de inércia da roda de Maxwell através da equação (7):

I_z = ___________________________

2.3 Comente os resultados obtidos

3 Conservação e transferência de energia.

X = *t* (s) (medidos anteriormente)	***s* (m)**	**Erro *s* (m)**	**Δt (s)**	**Erro Δt (s)**	**Y = *v* (m/s)**	**Erro *v* (m/s)**

3.1 Determine os parâmetros de ajuste à função do tipo $Y = A \cdot X^B$ aos pontos experimentais:

A = ____________________ ; B = _______________________

3.2 Compare e comente com os valores dados pela função da equação (8) usando o momento de inércia determinado anteriormente.

3.3 Com base nos valores da posição e velocidade no tempo mostre a variação das energias potencial, de translação e rotação da roda.

3.3.1 Qualitativamente qual energia potencial da roda é transferida para as energias de translação e de rotação? Comente?

3.3.2 O que aconteceria à transferência de energias se diminuíssemos o diâmetro da roda mantendo a sua massa? E se só aumentássemos a massa?

4 Conclusões