

# Mecânica e Ondas

## Trabalho de Laboratório

### Ondas estacionárias em cordas vibrantes

#### Objectivo

Estudo das ondas estacionárias em cordas vibrantes. Variação da frequência com a tensão da corda. Velocidade de propagação.

#### 1. Introdução

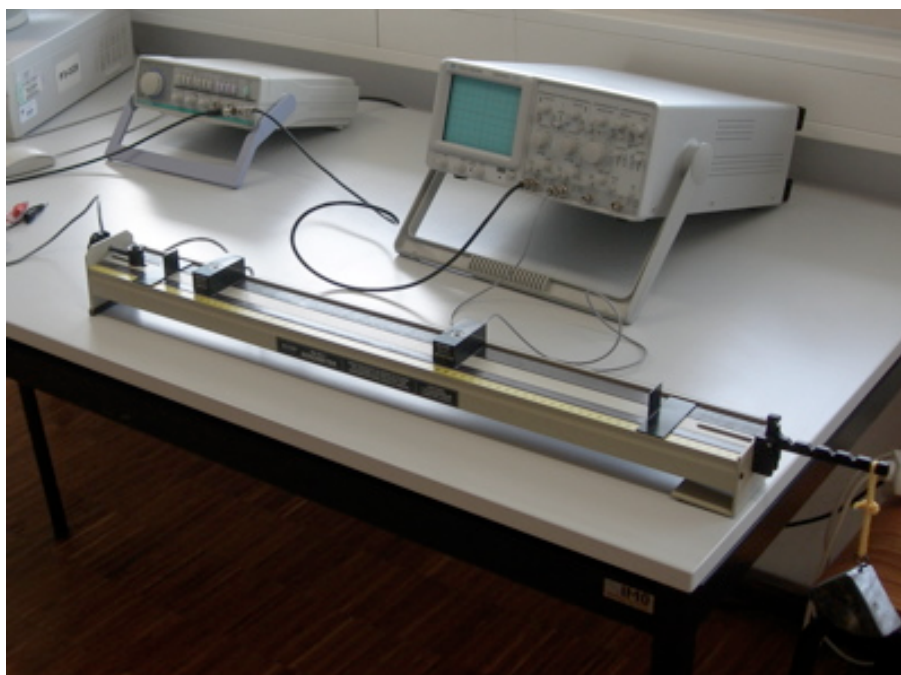


Figura 1: Montagem associada ao trabalho de cordas vibrantes

Este trabalho utiliza uma montagem que permite ajustar a tensão e o tipo de excitação a que se sujeitam cordas metálicas do género das utilizadas em guitarras. As cordas são montadas num banco onde a tensão é controlada através do correcto posicionamento de um peso numa das extremidades da corda (na figura 1 pode-se ver esse peso no canto inferior direito). A corda pode ser submetida a vários tipos de força excitadora (ex: toque com um objecto, força magnética). A vibração da corda é detectada com um sensor magnético constituído por uma pequena bobine posicionada noutra ponta do banco da montagem. Como a corda se encontra fixa nas duas extremidades, as ondas que se podem

observar designam-se por ondas estacionárias e permanecem enquanto durar a força excitadora.

A montagem utilizada pode ser esquematizada como na figura 2.

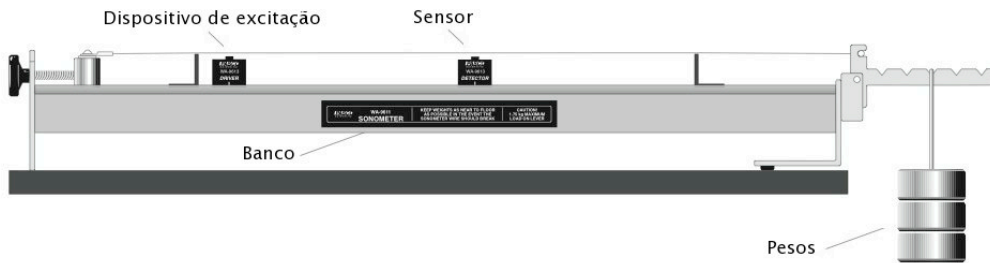


Figura 2: Esquema da montagem de suporte e excitação da *corda vibrante*.

A vibração que ocorre na corda pode ser esquematizada como na figura 3.

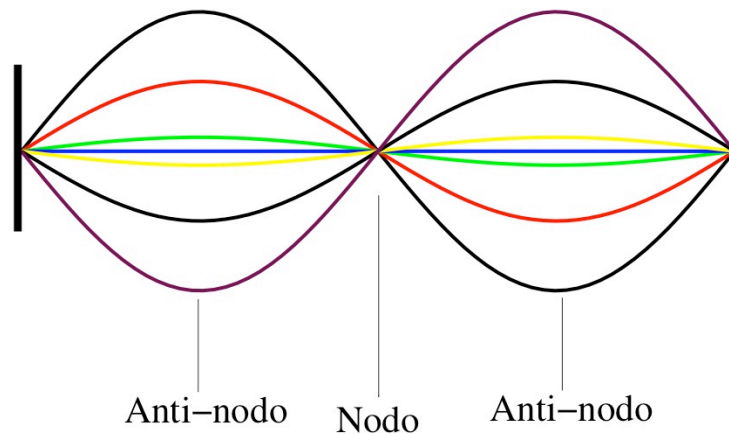


Figura 3: Um dos modos de vibração na corda com as extremidades fixas. No momento inicial a corda tem o comprimento dado pela afastamento entre as duas extremidades de suporte.

Para sabermos qual a função matemática que descreve a vibração temos elaborar o modelo matemático do sistema. Consideremos o que acontece a um pequeno segmento de uma corda elástica perfeitamente uniforme com uma determinada massa por unidade de comprimento  $\rho$ , que não ofereça resistência a movimentos de flexão, submetida a uma tensão  $T_e$  muito superior à força de gravidade.

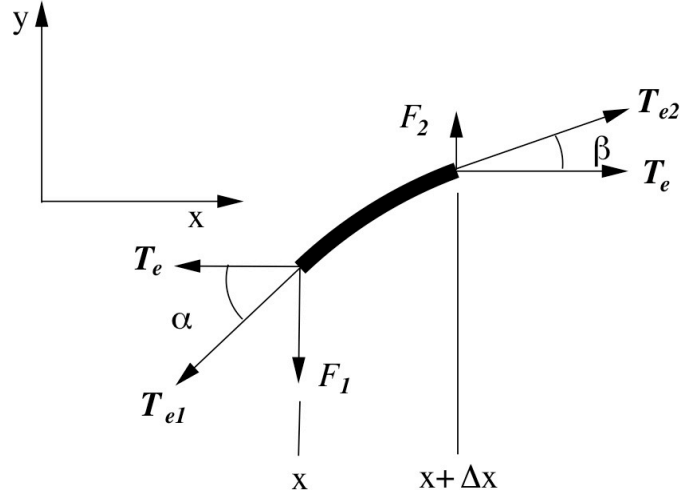


Figura 4: Pequeno segmento da corda sujeito a duas tensões.

Se as amplitudes de oscilação forem pequenas então, com o auxílio da figura 4, podemos escrever as seguintes equações de equilíbrio:

$$T_{e1} \cos \alpha = T_{e2} \cos \beta = T_e \quad (1)$$

$$F_2 - F_1 = T_{e2} \sin \beta - T_{e1} \sin \alpha = F = ma = \rho \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2)$$

Como  $T_{e2} = \frac{T_e}{\cos \beta}$  e  $T_{e1} = \frac{T_e}{\cos \alpha}$  então a equação (2) pode escrever-se da forma

$$T_e \frac{\sin \beta}{\cos \beta} - T_e \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \rho \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (3)$$

Atendendo a que a tangente de  $\alpha$  se pode obter do declive do segmento da corda no ponto  $x$ ,  $\tan \alpha = \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x$ , e que a tangente de  $\beta$  se pode obter do declive do segmento da corda no ponto  $x + \Delta x$ ,  $\tan \beta = \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+\Delta x}$ , a expressão (3) toma a forma

$$\frac{1}{\Delta x} \left[ \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} - \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x \right] = \frac{\rho}{T_e} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (4)$$

No limite  $\Delta x \longrightarrow 0$ , i.e. quando o segmento for infinitesimal temos que a lado direito da equação (4) é a 2ª derivada de  $y$  em ordem a  $x$ , e portanto temos

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T_e} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (5)$$

Facilmente se verifica que  $\frac{\rho}{T_e}$  tem dimensões do inverso do quadrado de uma velocidade  $v$ . A equação (5) tem então a forma final

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (5a)$$

com

$$v = \sqrt{\frac{T_e}{\rho}} \quad (5b)$$

A equação 5a tem a designação de *equação de onda plana* uma vez que as suas soluções são funções de onda do tipo

$$y(x,t) = y_M \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = y_M \sin(\omega t - kx) \quad (6)$$

onde  $k$  é o *número de onda*,  $\omega$  é a *frequência angular*,  $\lambda$  é o *comprimento de onda*,  $T$  o *período* e  $y_M$  a *amplitude* da oscilação. Se utilizar a identidade (6) na equação (5) verificamos que

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}. \quad (7)$$

A equação (5) diz-nos que a perturbação que se observa na corda propaga-se ao longo da corda com a velocidade  $v$ .

Na situação em que a corda esta fixa nas duas extremidades então a perturbação é reflectida nas duas extremidades e num determinado ponto da corda, num determinado instante, teremos que somar as duas perturbações que aí se encontram vindas de sentidos opostos. Se considerarmos que não houve atenuação da amplitude da perturbação temos

$$y(x,t) = y_1 + y_2 = y_M \sin(\omega t - kx) + y_M \sin(\omega t + kx) \quad (8)$$

Como  $\sin A + \sin B = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{B-A}{2}\right)$  então a equação (8) pode escrever-se da forma

$$y(x,t) = 2y_M \sin(kx) \cos(\omega t). \quad (9)$$

A equação (9) designa-se por *onda estacionária* e tem duas características interessantes:

1. Num determinado instante de tempo  $t_0$  (imagine-se uma fotografia instantânea da corda) temos que a corda apresenta a forma de uma sinusóide descrita por

$$y_{t_0}(x) = \underbrace{2y_M \cos(\omega t_0)}_{\text{constante}} \sin(kx) \quad (10)$$

2. Se observarmos uma determinada posição da corda verificamos que a posição vertical da corda nessa posição  $x_0$  varia ao longo do tempo de acordo com a equação

$$y_{x_0}(t) = 2y_M \underbrace{\sin(kx_0)}_{\text{constante}} \cos(\omega t) \quad (11)$$

Se fizermos um filme das oscilações da corda e sobrepuermos todas as imagens obtemos uma figura com o aspecto, por exemplo, da figura 3.

A equação (10) diz-nos que nas posições que verificam a expressão  $kx_n = \pi n$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  temos amplitudes de oscilação nulas ou seja  $x_n = \frac{\lambda n}{2}$ . Se a distância entre os dois pontos de fixação da corda for  $L$  então temos que  $\lambda$  tem de verificar a equação

$$L = \frac{\lambda n}{2} \quad (12)$$

A equação (12) indica-nos que existem  $n$  modos de oscilação da corda compatíveis com a distância  $L$  entre os pontos de fixação das extremidades da corda. A partir das equações (7) e (12) verificamos que

$$L = \frac{n}{2} \frac{2\pi v}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{\pi v n}{L} \Rightarrow f_n = n \frac{v}{2L} \quad (13)$$

e se atendermos a (5a) temos

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T_e}{\rho}} \quad (14)$$

Verifica-se assim que dependendo da tensão  $T_e$  aplicada à corda, da sua massa por unidade de comprimento  $\rho$ , do seu comprimento em repouso  $L$ , poderão ser observados *modos de vibração* de acordo com a expressão (14) para valores de  $n=1, 2, 3, 4, \dots$ . Estes modos de vibração podem ser excitados externamente e correspondem a situações em que a amplitude de oscilação é máxima. As frequências que lhes correspondem designam-se por *– frequências de ressonância*. O modo de frequência mais baixo designa-se por *modo fundamental de ressonância*.

## 2. Trabalho experimental

### Equipamento

1 base: inclui uma escala graduada, uma aparelho de força constituído por um braço e um parafuso de ajuste da tensão na corda

2 suportes

1 conjunto de cordas de guitarra com as seguintes características:

Referência	Densidade linear (gr/m)
.010	0.39
.014	0.78
.017	1.12
.020	1.50
.022	1.84

2 bobinas:

- **“DRIVER”**, que permite induzir oscilações na corda e excitar os seus modos de vibração
- **“DETECTOR”**, que permite analisar a amplitude dos modos de vibração

1 massa de valor conhecido

1 gerador de sinais

1 osciloscópio

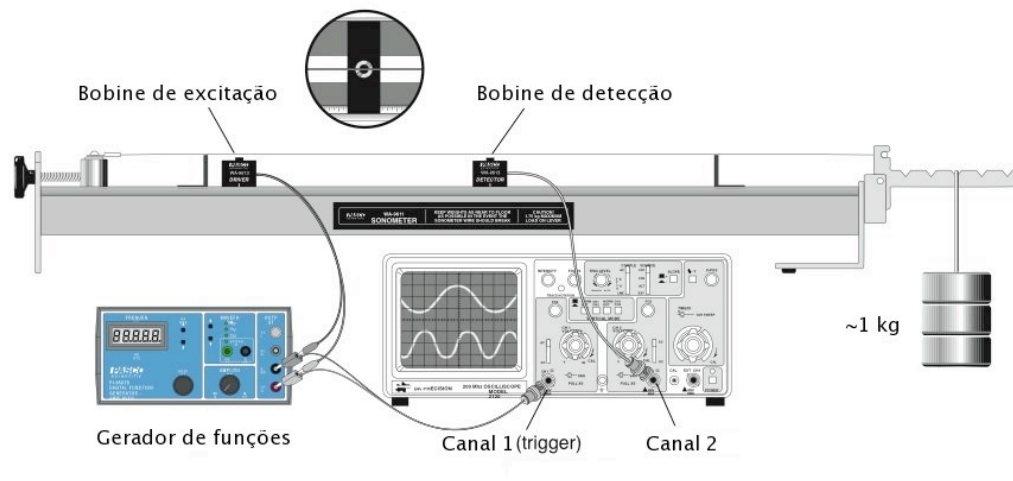


Figura 5: Montagem experimental

## 2.1 Estudo da variação da velocidade de propagação/frequência de vibração de uma corda com a densidade e tensão da corda (Calibração do aparelho de força)

- 1) Efectue o esquema de ligações e monte a experiência como indicado na figura 5.
- 2) Coloque os 2 suportes sobre a base, espaçados de 60 cm
- 3) Instale a corda sobre a base da experiência, e prenda-a de um dos lados ao cilindro cuja posição é controlada pelo parafuso e do outro ao braço onde suspenderá a massa. A corda fica apoiada em dois suportes sobre a escala graduada.
- 4) Coloque a massa de maior valor na posição 5 onde efectua a maior tensão sobre a corda

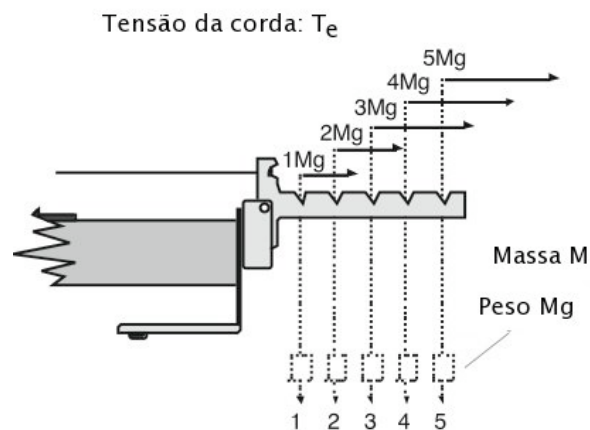


Figura 6: Posições da massa para variar a tensão na corda  $g$  é a constante de aceleração gravítica (ver Apêndice).

- 5) Ajuste o parafuso de forma a que o braço da base onde suspendeu a massa esteja horizontal
- 6) Coloque as 2 bobinas sobre o suporte. Posicione a bobine “**DRIVER**” a 5 cm de um dos suportes e a bobine “**DETECTOR**” no ponto médio da corda entre os apoios. Ligue o “**DRIVER**” e o “**DETECTOR**” aos canais 1 e 2 do respectivamente.
- 7) Tome nota dos valores do comprimento da corda, tensão e densidade linear da corda utilizada.
- 8) Ligue o gerador de sinais e o osciloscópio. Selecione o gerador de sinais para ondas sinusoidais com uma frequência próxima 150 Hz (amplitude  $\sim 10V_{p-p}$ ) e ajuste a escala do osciloscópio para aproximadamente 0.2V/divisão (canal 1) e 5 mV/divisão (canal 2) (valores indicativos). Coloque o osciloscópio em modo X-Y (Consulte a breve nota introdutória ao funcionamento do osciloscópio)
- 9) Coloque a corda em vibração dedilhando-a suavemente no ponto médio, junto ao detector.
- 10) Ajuste a frequência do gerador, aumentando-a ou diminuindo-a, até observar um elipse no osciloscópio. Confirme que para frequências menores que essa não encontra outra situação semelhante.

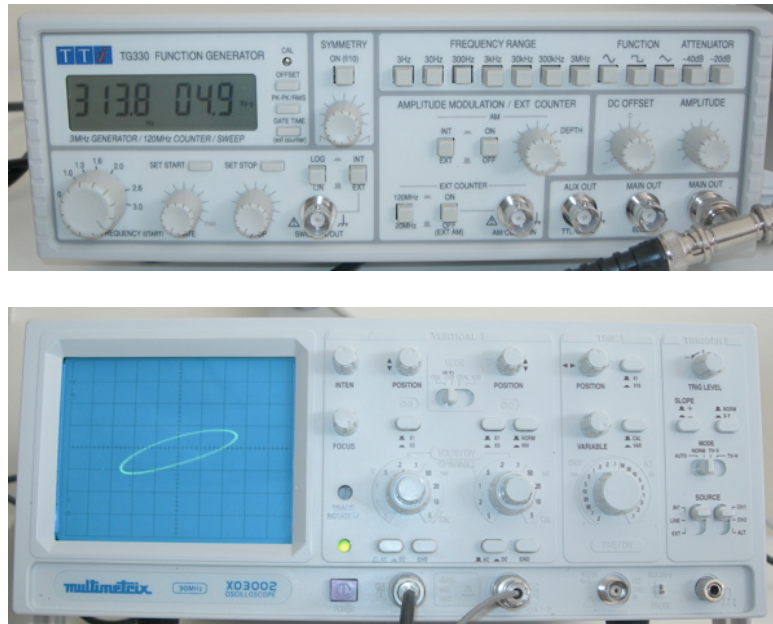


Figura 7: Imagens do gerador e dos osciloscópio utilizados no trabalho. O osciloscópio mostra uma figura de Lissajou em que os dois sinais eléctricos têm a mesma frequência.

- 11) Coloque o osciloscópio em modo *TEMPO* e confirme que a amplitude do sinal do detector não é nula e ajuste muito suavemente a frequência do gerador até obter a maior amplitude possível. Verifique que os sinais provenientes do gerador e do detector têm a mesma frequência.
- 12) Registe a frequência de ressonância que obteve. A frequência que obteve pode alterar-se se variar um pouco a tensão da corda no parafuso de ajuste. Estime um intervalo de frequências que tenha a certeza de englobar a frequência de vibração fundamental da corda tendo em atenção a precisão no ajuste do gerador e o ajuste de tensão. Esse poderá ser considerado o seu erro experimental.
- 13) A velocidade de propagação pode ser obtida pela frequência de ressonância fundamental pela relação  $v = \lambda/T = f 2L$ .
- 14) Repita para outras posições de apoio da massa no aparelho de tensão.
- 15) (Opcional) De seguida repita o mesmo procedimento para uma segunda corda de densidade linear diferente.
- 16) Com base nos dados obtidos efectue um ajuste pelo à equação que relaciona a frequência fundamental com a posição em colocou a massa. Para efectuar o ajuste pedido pode utilizar o computador que está junto da montagem e executar o programa Excel:

A partir do ajuste da função  $v(p) = \sqrt{\frac{Mgp}{\rho}}$  aos dados experimentais podemos obter os valores de  $M$  ou  $\rho$ , tendo em conta que  $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$  e  $p = 1,2,3,4,5$  é o factor multiplicativo associado ao aparelho de força.



## 2.2 Determinação da frequência de ressonância fundamental em função do comprimento da corda $L$

O procedimento para esta parte do trabalho é idêntico ao anterior excepto que agora mantém-se uma corda com a tensão da constante (a massa na mesma posição) e variamos a posição dos suportes da corda, ou seja, o comprimento  $L$  da corda. Deve utilizar a mesma massa que utilizou na experiência anterior na posição  $p=1$ . Para tal deve andar com o suporte da sua posição 60 cm afastado do outro para a posição a 40 cm de distância andando de 5 em 5 cm.

Com base nos dados obtidos efectue um ajuste pelo método da equação que relaciona a frequência fundamental com o comprimento da corda.

Para efectuar o ajuste à função  $f(L) = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_e}{\rho}}$  pedido pode utilizar o computador que está junto da montagem e executar o programa Excel. Imprima o gráfico e complete-o com a indicação da função de ajuste, parâmetros de ajuste, indicação das grandezas físicas, unidades, etc.

## 2.3 Determinação da 2ª harmónica de vibração de uma das cordas

- Após ter obtido a frequências de vibração fundamental da corda nas condições dos pontos anteriores, comece por deslocar o *DETECTOR* até uma posição a  $\frac{3}{4}$  das distância  $L = 60$  cm entre os apoios e coloque o *DRIVER* a  $\frac{1}{4}$  da mesma distância. Verifique que obtém em modo X-Y dos osciloscópio a uma curva próxima da figura 8. (Se tiver alguma dificuldade pode passar logo para alínea seguinte)

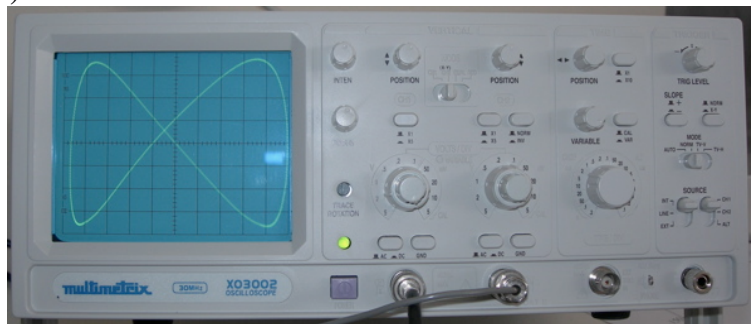


Figura 8: Imagens do gerador e dos osciloscópio utilizados no trabalho. O osciloscópio mostra uma figura de Lissajou em que os dois sinais eléctricos têm a mesma frequência.

Confirme de seguida que a frequência dos sinais provenientes do gerador e do detector têm frequências na proporção 1:2. Neste caso embora esteja a excitar as

- oscilações da corda com a frequência fundamental também ocorrem oscilações da corda com frequências múltiplas dessa.
- b) Aumente a frequência do gerador para o dobro e verifique que recupera a figura de Lissajou correspondente a sinais de igual frequência (elipse).
  - c) Aumente novamente a frequência do gerador até o triplo da frequência fundamental e desloque o DETECTOR até a  $5/6$  da distância  $L$  e coloque o *DRIVER* a  $1/6$  da mesma distância. Verifique que obtém mais uma vez a figura de Lissajou correspondente a sinais de igual frequência.
  - d) Observando o modo de vibração da corda para as situações a) fundamental, b) 2<sup>a</sup> harmónica e c) 3<sup>a</sup> harmónica esboce a forma da corda a vibrar (nodos e ventres) correspondentes a essas oscilações.

### **Bibliografia**

- Contribuição para o Desenvolvimento do Ensino da Física Experimental no IST, A. Ribeiro, P. Sebastião, F. Tomé, Departamento de Física do IST (1996).
- [Tratamento e Apresentação de Dados Experimentais](#), M. R. da Silva, DF, IST, 2003
- Introdução à Física, J. Dias de Deus, M. Pimenta, A. Noronha, T. Peña, P. Brogueira, McGraw-Hill (1992).
- Physics, For Scientists and Engineers with Modern Physics, 5 ed. Raymond A. Serway, Robert J. Beichner, Saunders College Publishing, 2000, ISBN: 0-03-022657-0
- University Physics, H. Young, R. Freedman, 9th ed., Addison-Wesley, New York, 1996.
- The Art of Experimental Physics, D. Preston, E. Dietz, Jhon Wiley, New York, 1991.

## Apêndice

O aparelho de força que permite ajustar a tensão do fio da figura 1 em equilíbrio estático

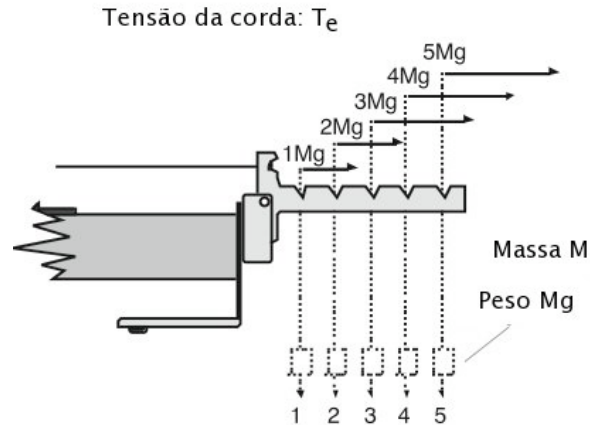


Figura 1: Aparelho de força para ajuste da tensão da corda.

verifica a seguinte equação de equilíbrio dos momentos das forças aplicadas:

$$\sum_i \vec{\tau}_i = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_1 = -\vec{\tau}_2 = \vec{r}_1 \times T_e = -\vec{r}_2 \times Mg \hat{e}_z \quad (1)$$

em que  $T_e$  é a tensão da corda  $M$  é a massa e  $g$  a aceleração da gravidade.  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  encontram-se indicados na figura 2 numa situação geral em que o eixo dos  $x$ , paralelo ao braço do aparelho de força da montagem, não se encontra na horizontal, paralelo ao banco da montagem.

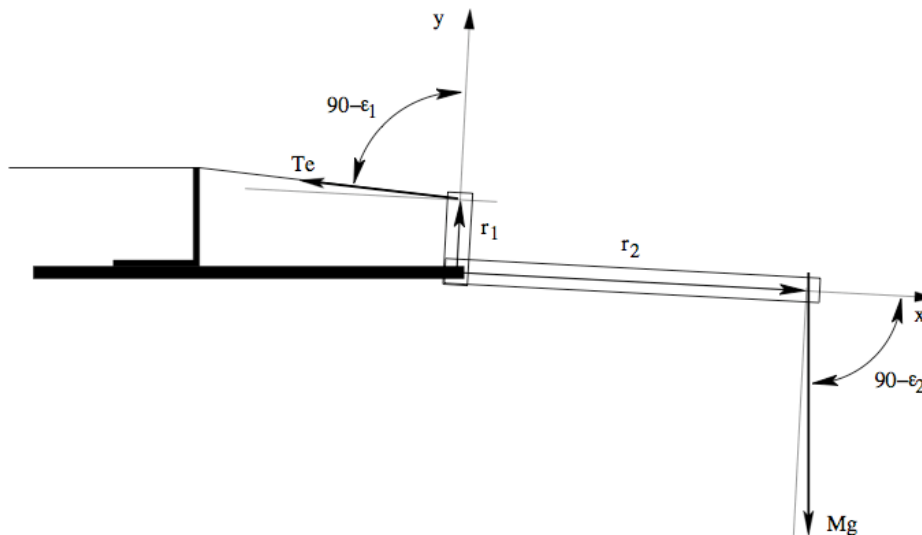


Figura 2: Esquema da montagem com diagrama de forças aplicadas.

Em módulo podemos verificar que (1) se pode escrever da forma

$$r_1 T_e \sin(90 - \varepsilon_1) = Mgr_2 \sin(90 - \varepsilon_2) \Rightarrow r_1 T_e \cos(\varepsilon_1) = Mgr_2 \cos(\varepsilon_2) \quad (2)$$

donde

$$T_e = pg \frac{\cos(\varepsilon_2)}{\cos(\varepsilon_1)} M = pgM' \quad (3)$$

em que se assume que  $r_2 = pr_1$  em que  $p=1, 2, 3, 4, 5$  é um factor multiplicativo correspondente à posição em que se coloca a massa no aparelho de força. Facilmente se verifica que se  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \approx 0$  então a tensão na corda é  $pMg$ .

Em geral considerar que  $T_e' = pMg$  é uma aproximação razoável. No entanto, mesmo que se consiga que  $\varepsilon_2 \approx 0$  basta que  $\varepsilon_1 \approx 10^\circ$  para que a aproximação  $T_e' = pMg$  num erro sistemático de cerca de  $\sim 1.5\%$  o que para uma massa real de cerca de  $M = 1\text{kg}$  corresponde uma massa efectiva  $M'$  cerca de 15g menor.

## Mecânica e Ondas

### Relatório

(destaque para entregar no fim da aula ao docente)

### Cordas Vibrantes

Nº	Nome	Curso

Data	Turno (dia/hora)	Grupo

#### 1. Objectivo deste trabalho:

#### 2. Estudo da variação da velocidade de propagação/frequência de vibração de uma corda com a densidade e tensão da corda (calibração do aparelho de tensão)

Massa: \_\_\_\_\_

Densidade linear  $\rho$  (Kg/m) da corda utilizada: \_\_\_\_\_

<u>Posição da Massa</u>	<u>Tensão <math>T_e</math> (N)</u>	<u>Frequência de Ressonância <math>f</math> (Hz)</u>	<u>Erro da Frequência <math>\varepsilon_f</math> (Hz)</u>	<u>Velocidade de propagação <math>v</math> (m/s)</u>

(Opcional) Densidade linear  $\rho$  (Kg/m) da corda utilizada: \_\_\_\_\_

<u>Posição da Massa</u>	<u>Tensão <math>T_e</math> (N)</u>	<u>Frequência de Ressonância <math>f</math> (Hz)</u>	<u>Erro da Frequência <math>\epsilon_f</math> (Hz)</u>	<u>Velocidade de propagação <math>v</math> (m/s)</u>

2.1 Efectue um ajuste da equação que relaciona a velocidade de propagação (frequência fundamental) com a tensão da corda (eq. do tipo  $v(p) = \sqrt{\frac{Mgp}{\rho}}$ ).

2.2 Compare com os valores esperados indicados pelo fabricante da massa e da densidade da corda e comente.

**3. Determinação da frequência de ressonância fundamental em função do comprimento da corda  $L$**

Massa: \_\_\_\_\_ ; Posição: \_\_\_\_\_

Densidade linear  $\rho$  (Kg/m) da corda utilizada: \_\_\_\_\_

<u>Comprimento</u> <u>da corda</u> $L$ (cm)	<u>Frequência</u> <u>de</u> <u>Ressonância</u> $f$ (Hz)	<u>Erro da</u> <u>Frequência</u> $\varepsilon_f$ (Hz)

3.1 Efectue um ajuste da equação que relaciona a frequência fundamental com o comprimento da corda (eq. do tipo  $f(L) = \frac{v}{2L}$ ).

3.2 Comente os valores obtidos:

**4. Determinação de harmônicas de vibração de ordem superior de uma das cordas**

Posição do detector: _____
Posição do <i>DRIVER</i> : _____
Frequência do gerador: _____
Frequência do detector: _____
Esboce a forma de onda correspondente à oscilação da corda entre os pontos de apoio.



Posição do detector: _____
Posição do <i>DRIVER</i> : _____
Frequência do gerador: _____
Frequência do detector: _____
Esboce a forma de onda correspondente à oscilação da corda entre os pontos de apoio.

Posição do detector: _____
Posição do <i>DRIVER</i> : _____
Frequência do gerador: _____
Frequência do detector: _____
Esboce a forma de onda correspondente à oscilação da corda entre os pontos de apoio.

## **5. Conclusões**