Teste de Mecânica e Ondas (7 de Maio de 2012)
LEGM e LEIC-A, Campus da Alameda
Responsável: Prof. Ana M. Mourão
Duração do Teste : 1h 30 minutos

Atenção:

- Numere e identifique todas as páginas que utilizar.
- A cotação das perguntas é dada no início de cada uma.
- Responda a cada grupo em páginas separadas.
- Quaisquer respostas escritas a lápis são ignoradas.
- Ver apêndice no fim do enunciado do teste.

1. Um mecanismo para retirar água de um poço é baseado no mesmo princípio de funcionamento da balança representada na figura em anexo, e que foi demonstrada com o Laboratório de Demonstrações. Considere o caso geral em que r_B e r_C são os braços i.e. as distâncias entre o ponto suporte da balança (A) e os pontos onde os pratos estão suspensos (B e C, respectivamente). Os pontos de suspensão são assim os pontos onde as forças F_B e F_C podem ser aplicadas. Considere que uma força F_B é aplicada no braço esquerdo da balança e uma força F_C é aplicada no braço direito da balança. A força F_B pode ser o peso de uma massa m_B colocada no prato da balança, a força F_C pode ser devida a pesos usados para pesar a massa colocada no outro prato da balança.

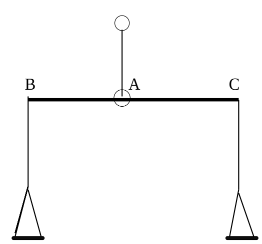

FIG. 1: Balança com braços

Responda às seguintes questões.

(a) [3.0] Quais os sentidos e os módulos dos momentos das forças F_B e F_C relativamente a um eixo Oz, coincidente com o eixo de rotação que passa em A, e que aponta no sentido do leitor? Quais as condições para que a balança esteja em equilíbrio?

(b) [3.0] Suponha que tem à sua disposição um sistema semelhante ao representado na figura para retirar água de um poço e demonstre que sabe usar o sistema, respondendo correctamente às perguntas que se seguem.
Considere $r_C = 3r_B$. Sabe que para retirar a água do poço pode usar um balde com 30 l de capacidade. A corda que suporta o balde pode ser fixa com um gancho em B ou C. Qual a relação entre a força que terá que fazer para conseguir retirar a água do poço se fixar o balde em B e depois puxar aplicando uma força em C? E no caso em que fixa o balde em C e depois puxa o balde aplicando uma força em B? Justifique qual seria a sua opção para o ponto que escolheria para fixar o balde: B ou C?

2. Um carrinho, com massa $m_1 = 150g$ e velocidade inicial $\vec{v}_1 = 1m/s\,\vec{e_x}$, colide com um segundo carrinho de massa m_2 que se encontra parado (carrinho 2). Considere que a colisão é completamente elástica. Os carrinhos estão numa calha assegurando que a colisão se passa ao longo de uma direcção que une o centros de massa dos mesmos.

   (a) [2.0] Considere que há conservação da energia e do momento linear na colisão e demonstre que as expressões para $v_1^\star$- a velocidade do carrinho 1 após a colisão e $v_2^\star$ - a velocidade do alvo após a colisão são dadas, respectivamente, por:

   $$v_1^\star = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{e} \quad v_2^\star = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

   (b) [1.5] Calcule a velocidade do carrinho 1 e do carrinho 2 após a colisão nos casos em que: i) as massas dos carrinhos são iguais; ii) a massa do carrinho 2 pode ser considerada infinitamente maior que a massa do carrinho 1.

   (c) [2.5] Calcule o momento linear transferido ao carrinho 2 nos casos anteriormente definidos como i) e ii).

3. Uma massa e uma mola podem ser ligadas a um mecanismo com motor que permite pôr o sistema massa-mola a oscilar num plano horizontal com frequência variável. Devido às propriedades da superfície horizontal, quando a massa oscila ligada à mola fica sujeita a uma força de atrito proporcional à velocidade e com coeficiente $b = 2Ns/m$.

   (a) [1.5] Calcule a constante da mola sabendo que, fazendo um teste, podemos verificar que quando a massa $m = 0.4\,kg$ é suspensa na mola esta mola alonga-se $\Delta x = 9,8\,cm$.

   (b) [2.0] Suponha que põe a massa $m = 0.4\,kg$ a oscilar ligada à mola com amplitude inicial é $A = 0.3\,m$ e velocidade nula. Considere o caso em que a única força a actuar na massa ao longo da direcção da oscilação é a força elástica da mola.
   Qual é a velocidade da mola ao fim de 3 segundos? Justifique os cálculos.

   (c) Considere que a massa é agora posta a oscilar ligada à mola, está sujeita à força de atrito referida anteriormente e é ainda ligada ao mecanismo que actua na massa com uma força $F_{\text{ext}}(t) = F_{\text{o}} cos(\omega_{\text{ext}} t)$, onde $F_{\text{o}} = 5\text{N}$ e ω_{ext} é a frequência da força exterior que pode variar.

      i. [1.0] Qual a equação de Newton que descreve o movimento da massa nesta situação?

      ii. [1.5] Demonstre que amplitude de oscilação da massa é máxima se ω_{ext}, a frequência da força exterior, fôr tal que $\omega_{\text{ext}}^2 = \omega_{\text{o}}^2 - 2\lambda^2$ onde $\omega_{\text{o}}^2 = k/m$ e $\lambda = b/(2m)$.

      iii. [2.0] Qual a amplitude da oscilação da massa ligada à mola, quando frequência da força exterior $F_{\text{ext}}(t)$ é igual à frequência de ressonância?

Apêndice: exemplos de equações diferenciais e respectivas soluções

$\ddot{x} + \omega_{\text{o}}^2 x = 0$ tem como solução $x(t) = A\cos(\omega_{\text{o}} t + \varphi_{\text{o}})$.

$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_{\text{o}}^2 x = 0$ tem como solução $x(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi_{\text{o}})$, onde $\omega = \sqrt{\omega_{\text{o}}^2 - \lambda^2}$.

$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_{\text{o}}^2 x = (F_{\text{o}}/m) cos(\omega_{\text{ext}} t)$ tem solução que converge no tempo para $x(t) = C\cos(\omega_{\text{ext}} t + \Phi)$, onde a amplitude C é dada por

$$C = \frac{(F_{\text{o}}/m)}{\sqrt{(\omega_{\text{o}}^2 - \omega_{\text{ext}}^2)^2 + 4\lambda^2\omega_{\text{ext}}^2}} \ .$$