Exame de Mecânica e Ondas (28 de junho de 2012)
LEGM e LEIC-A, Campus da Alameda
Responsável: Prof. Ana M. Mourão
Duração do exame : 2h30 minutos

Atenção:

- Numere e identifique todas as páginas que utilizar.
- A cotação das perguntas é dada no início de cada uma.
- Responda a cada grupo em páginas separadas. Quaisquer respostas escritas a lápis são ignoradas.

1. Considere o sistema representado por uma roldana e duas massas. As duas massas m_1 e m_2 estão ligadas entre si por uma corda que passa pela roldana, como se vê na figura 1. A roldana pode ser aproximada a um disco de raio $r = 0.1\,m$ e massa m_D, sendo que a densidade do disco não é uniforme. Considere $m_1 = 1\,kg$ e $m_1 = 5m_2$.

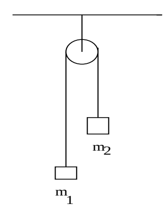

FIG. 1: Máquina de Atwood

   (a) [1.0] Qual a relação entre um deslocamento de m_1 e o ângulo de rotação do disco? Qual a relação entre um deslocamento de m_2 e o ângulo de rotação do disco?
   (b) [0.5] Qual a relação entre a aceleração de m_1 e a aceleração angular do disco?
   (c) [1.5] Calcule a expressão para a aceleração da massa m_1.
   (d) [2.0] Sabendo que a massa m_1 demora $t = 3\,s$ para se deslocar 45 cm quando a velocidade inicial é nula, calcule a aceleração de m_1.

2. Na figura 2 está representado um sistema de rega. A água é armazenada num depósito que está a uma altura $h_D = 3\,m$ do solo. Considere que o nível da água no depósito é $h_A = 0.7\,m$.

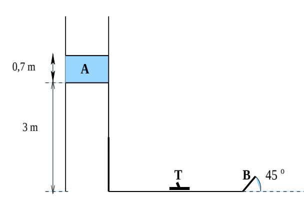

FIG. 2: Depósito de água

   A água sai por uma mangueira cuja extremidade (B) está a uma altura ao solo de $h_B = 0.25\,m$, a secção é $S_1 = 2\text{cm}^2$ e faz um ângulo de 45º com a horizontal.

   Na mangueira há uma torneira (T), regulável remotamente por computador.

   (a) [1.0] Qual a força exercida pela água numa parede lateral de um depósito de forma cúbica quando este está cheio de água e cujo lado tenha comprimento $l = 0.7\,m$. Justifique.
   (b) [2.5] Qual o valor da velocidade da água à saída da mangueira? Justifique a resposta com cálculos.

3. Uma massa $m = 0.3\,kg$ presa a uma mola é posta a oscilar sobre uma superfície horizontal, inicialmente sem atrito. No instante inicial a massa é largada, com velocidade inicial nula, de uma posição afastada 7 cm da posição de equilíbrio. Verifica-se que o período das oscilações da massa é $T = 1\,s$.

   (a) [0.5] Escreva a equação de Newton para o movimento da massa ligada à mola. Despreze o atrito.
   (b) [1.0] Calcule a amplitude, A, a frequência angular, ω, e a fase inicial, φ_o.
   (c) [1.5] Calcule, e apresente justificando, qual a expressão para a energia cinética e a expressão da energia potencial da massa ligada à mola em função do tempo. Demonstre que a soma da energia cinética e a da energia potencial é constante no tempo e calcule o valor.
   (d) [1.0] Quando a massa é colocada a oscilar sobre uma superfície ficando sujeita a uma força de atrito proporcional à velocidade da massa, a amplitude das oscilações reduz-se a metade ao fim de 11 segundos. Qual o coeficiente da força de atrito a que a massa está sujeita?

4. Duas ondas $\Phi_1(x,t) = 5\,\text{cm}\,\sin(4.0\,x - 3,0\,t)$ e $\Phi_2(x,t) = 5\,\text{cm}\,\sin(4.0\,x + 3,0\,t)$, propagam-se em sentidos opostos numa corda de comprimento L que tem as extremidades fixas. Considere $k = 4.0\,m^{-1}$ e $\omega = 3 rad\,s^{-1}$. Verifica que **o ponto a meio da corda não se move**.

   (a) [1.0] Demonstre que a resultante da sobreposição das duas ondas na corda é dada pela expressão
   $$\Phi_1(x,t) + \Phi_2(x,t) = 10\,cm\sin(4.0\,x)\cos(3,0\,t)$$
   (b) [1.0] Qual o comprimento da corda? Justifique .
   (c) [1.0] Qual a equação de movimento para o ponto $x = 20\,\text{cm}$?
   (d) [1.0] Determine as coordenadas x na corda para as quais a amplitude de oscilação é máxima.

5. Um avião, que se desloca com uma velocidade $v = 900\,km/h$, a uma altitude h, tem que fazer uma curva de raio $R = 5000\,m$. Considere a massa do avião m=15 toneladas e que a trajectória do centro de massa do avião é num plano paralelo à superfície terrestre.

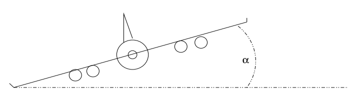

FIG. 3: Avião em curva

   (a) [0.5] Represente esquematicamente quais as forças que actuam no avião, do ponto de vista de um controlador aéreo situado numa torre de controlo de um aeroporto quando o avião faz uma curva.
   (b) [2.0]] Qual o valor do ângulo entre a horizontal e as asas do avião (α) se o módulo da velocidade do avião se mantiver constante durante a manobra.
   (c) [0.5] Represente esquematicamente quais as forças que actuam no piloto, do ponto de vista do piloto, durante esta manobra.
   (d) [0.5] Qual seria o raio da curva para o piloto sentir uma aceleração centrífuga de $7g$, num vôo à mesma velocidade? Se necessário considere o α obtido anteriormente. Em alternativa, se necessário pode condiderar $\alpha = 45^o$.

Apêndice

A.) $\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

B.1) $\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0$ tem como solução $x(t) = A\cos(\omega_o t + \varphi_o)$.

B.2) $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_o^2 x = 0$ tem como solução $x(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi_o)$, onde $\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}$.

B.3) $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_o^2 x = (F_o/m)cos(\omega_{\text{ext}} t)$ tem solução que converge no tempo para $x(t) = A\cos(\omega_{\text{ext}} t + \Phi)$, onde a amplitude A é dada por
$$A = \frac{(F_o/m)}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega_{\text{ext}}^2)^2 + 4\lambda^2\omega_{\text{ext}}^2}} \ .$$