Eletromagnetismo e Ótica (MEC/LEGM)

1ª Semana Segunda, 16 Setembro, 2013

Problemas

1) Determine a velocidade $\vec{v}$ e a aceleração $\vec{a}$ em cada instante t para as seguintes trajectórias paramétricas num referencial cartesiano $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$:

   a) $\vec{r}(t) = t\,\vec{e}_x + 4\,\vec{e}_z \equiv \{t,\, 0,\, 4\}$

   b) $\vec{r}(t) = t^2\,\vec{e}_y + 3\,t\,\vec{e}_z \equiv \left\{0,\, t^2,\, 3\,t\right\}$

   c) $\vec{r}(x) = x\,\vec{e}_x + x^2\,\vec{e}_y + \left(3 + x^{-1}\right)\vec{e}_z \equiv \left\{x,\, x^2,\, 3 + x^{-1}\right\}$ onde $x = t$ ou $x = e^t$. Explique as diferenças nos dois casos.

2) Uma partícula está submetida a uma força $\vec{F}(\vec{r}) = 2\left(y^2 - x\right)\vec{e}_x + 3\,x\,y\,\vec{e}_y$ (N). Determine o trabalho realizado pela força para deslocar a partícula da origem para um ponto $P = \{2,\, 4\}$ ao longo dos seguintes caminhos alternativos

   a) Primeiro ao longo de $\vec{e}_x$ e depois paralelo a $\vec{e}_y$.

   b) Ao longo da recta da origem ao ponto P.

   c) Ao longo da parábola $y = x^2$.

3) O operador gradiente (grad ou ∇) em coordenadas cartesianas é $\nabla = \vec{e}_x \dfrac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \dfrac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \dfrac{\partial}{\partial z}$. Mostre que $\nabla\left(\dfrac{1}{r}\right) = -\dfrac{1}{r^2}\,\vec{e}_r$, onde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e o versor $\vec{e}_r = \dfrac{\vec{r}}{r}$.

4) Se $\vec{A}$ for um vector constante, mostre que $\nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{r}\right) = \vec{A}$.

5) Determine a expressão para o operador gradiente ∇ em coordenadas cilíndricas $\{r,\; \theta,\, z\}$, sabendo que um deslocamento infinitesimal se escreve então $d\vec{r} = dr\,\vec{e}_r + r\,d\theta\,\vec{e}_\theta + dz\,\vec{e}_z$. (Sugestão: Use $d f(\vec{r}) = \nabla f \cdot d\vec{r}$, válido para qualquer função escalar $f(\vec{r})$.)
   Calcule o gradiente da função $f(\vec{r}) = \dfrac{z}{r}$ em coordenadas cilíndricas.

6) Calcule o valor do integral de caminho $\displaystyle\int_{P,Q} \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F} = -\dfrac{\vec{r}}{r^3}$ ao longo de um caminho que começa em $P = \{0,\, \infty,\, 0\}$ e acaba em Q={a,0,0}. Explique porque é que qualquer caminho entre estes dois pontos dá o mesmo resultado. (Sugestão: mostre que $\vec{F}\cdot d\vec{r} = d\varphi$ para $\varphi = \dfrac{1}{r}$.)