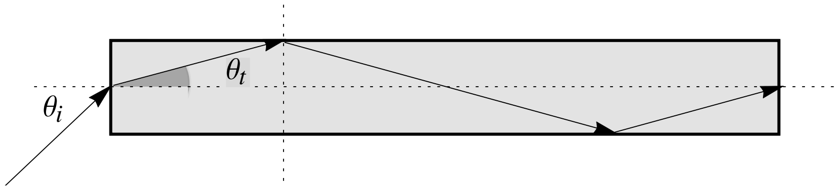
Eletromagnetismo e Ótica (MEC/LEGM)

14ª Semana

Probl. 1) Determine o valor mínimo do índice de refracção n_2 de uma fibra óptica rectilínea para que esta retenha completamente no seu interior um feixe de luz que entre numa extremidade a partir do ar com um ângulo de incidência θ_i arbitrário.



Resposta:

R. 1-a) $n_2 \geq \sqrt{2}$

Probl. 2) Uma onda e.m. plana, monocromática, propagando-se no vazio ($\varepsilon_r = \mu_r = 1$), apresenta uma polarização circular direita. Incide segundo um ângulo de $\theta_i = 45\,°$ sobre a superfície de um dielétrico com $\varepsilon_r = 2.56$, $\mu_r = 1$. O campo eléctrico da onda apresenta uma amplitude de $E_o = 5\times10^{-3}\left(\frac{V}{m}\right)$ e a sua frequência angular é dada por $\omega = 2\pi\times10^5\left(\frac{rad}{s}\right)$.

a) Calcule o seu comprimento de onda λ_i, e o comprimento de onda λ_t da onda transmitida.

b) Escreva a expressão para as componentes de $\vec{\boldsymbol{E}}$ da onda incidente e do respectivo campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$.

c) Calcule o valor médio do vector de Poynting da onda transmitida.

Respostas:

R. 2-a) $\lambda_i = 3\times10^3\,m,\ \ \lambda_t = 1.875\times10^3\,m$

R. 2-b) $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},\,t) = E_o\,e^{i\left(\omega\,t-\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}\right)}\left(\frac{\vec{\boldsymbol{e}}_x-\vec{\boldsymbol{e}}_y}{\sqrt{2}}\right)+E_o\,e^{i\left(\omega\,t-\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}+\pi/2\right)}\,\vec{\boldsymbol{e}}_z,\ \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},\,t) = -\frac{E_o}{c_o}\,e^{i\left(\omega\,t-\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}+\pi/2\right)}\left(\frac{\vec{\boldsymbol{e}}_x-\vec{\boldsymbol{e}}_y}{\sqrt{2}}\right)+\frac{E_o}{c_o}\,e^{i\left(\omega\,t-\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}\right)}\,\vec{\boldsymbol{e}}_z$

R. 2-c) $(E_o^s)_t = 3.3\times10^{-3}\left(\frac{V}{m}\right),\quad \left(E_o^p\right)_t = 3.48\times10^{-3}\left(\frac{V}{m}\right)\quad\Longrightarrow\quad\left\langle\left|\vec{\boldsymbol{S}}_t\right|\right\rangle = 4.9\times10^{-8}\left(\frac{W}{m^2}\right)$

Probl. 3) Uma onda eletromagnética plana, monocromática, de amplitude $E_o = 100\left(\frac{V}{m}\right)$ e frequência $f = 300\,MHz$ viaja na direção $\vec{\boldsymbol{e}}_z$ num meio com índice de refração $n = 1.5$ e permeabilidade magnética μ_o. Sabendo que a onda se encontra polarizada linearmente na direcção $\vec{\boldsymbol{e}}_x+\vec{\boldsymbol{e}}_y$, determine:

a) A velocidade de fase v da onda, o seu comprimento de onda λ e o vector número de ondas $\vec{\boldsymbol{k}}$.

b) a expressão para os campos elétrico $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},\,t)$ e magnético $\vec{\boldsymbol{H}}(\vec{\boldsymbol{r}},\,t)$ em função de $\vec{\boldsymbol{k}}$ e ω.

c) o vector de Poynting $\vec{\boldsymbol{S}}$ e a intensidade $\mathcal{I}$ da onda.

d) o ângulo de reflexão total θ_c.

e) o ângulo de transmissão θ_t, sabendo que a normal à superfície de separação é dada pela expressão $\vec{\boldsymbol{n}} = -\frac{1}{8}\left(\vec{\boldsymbol{e}}_x+\vec{\boldsymbol{e}}_y\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{\boldsymbol{e}}_z$.

f) Diga, justificando, em que condições é possível eliminar a onda refletida. Determine a normal ao plano de separação nessas condições.

Respostas:

R. 3-a) $v = 2\times10^8,\ \lambda = \frac{2}{3}\,m,\ \vec{\boldsymbol{k}} = 3\,\pi\,\vec{\boldsymbol{e}}_z\,m^{-1}$

R. 3-b) $\vec{\boldsymbol{E}} = 100\,Cos\left[6\times10^8\,\pi\,t-3\,\pi\,z\right]\left(\frac{\vec{\boldsymbol{e}}_x+\vec{\boldsymbol{e}}_y}{\sqrt{2}}\right)\ \left(\frac{V}{m}\right),\ \vec{\boldsymbol{H}} = \frac{n}{Z_o}\,E(\vec{\boldsymbol{r}},\,t)\left(\frac{\vec{\boldsymbol{e}}_y-\vec{\boldsymbol{e}}_x}{\sqrt{2}}\right)\ \left(\frac{A}{m}\right)$

R. 3-c) $\vec{\boldsymbol{S}} = \frac{125}{\pi}\,Cos\left[6\times10^8\,\pi\,t\,-3\,\pi\,z\right]^2\,\vec{\boldsymbol{e}}_z\ \left(\frac{W}{m^2}\right)\quad;\quad\mathcal{I} = \frac{250}{4\,\pi}\left(\frac{W}{m^2}\right)$

R. 3-d) $\theta_c = sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

R. 3-e) $\theta_t = sin^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

R. 3-f) $\theta_B = tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$, $\quad \vec{\boldsymbol{n}} = \pm \frac{2}{\sqrt{13}} \left(\frac{\vec{\boldsymbol{e}}_x + \vec{\boldsymbol{e}}_y}{\sqrt{2}}\right) + \frac{3}{\sqrt{13}}\, \vec{\boldsymbol{e}}_z$

Probl. 4) Uma onda plana linearmente polarizada cujo campo elétrico faz 45 ° com o plano de incidência incide a partir do ar na superfície de um meio de permitividade relativa $\varepsilon_r = 2.7$ com um ângulo de incidência $\theta_i = 45$ °.

a) Qual o estado de polarização da onda reflectida?

b) Se o ângulo de incidência for o ângulo de Brewster qual o estado de polarização da onda refletida?

Respostas:

R. 4-a) Linearmente polarizada com inversão de fase a 45 ° do plano de incidência.

R. 4-b) Verticamente polarizada para $\theta_B = 58.7$ °

Probl. 5) Quando uma onda incide a partir de um meio de maior densidade para um de menor densidade num ângulo igual ou maior que o ângulo crítico θ_c, a onda será totalmente reflectida para o meio mais denso e será acompanhada por uma onda superficial no meio menos denso.

a) Para a água destilada $\varepsilon_r = 81$ e $\mu_r = 1$. Numa onda incidente a partir da água para o ar, qual é o ângulo crítico?

b) Se o campo incidente tiver $E_o^s = 1\,\frac{V}{m}$ e incide com um ângulo $\theta_i = 45$ °, determine a magnitude do campo elétrico à superfície no ar e a $\frac{\lambda}{4}$ da superfície.

Respostas:

R. 5-a) $\theta_c = sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{81}}\right)$

R. 5-b) $|E_t|_s = 1.42\,\frac{V}{m}$ e $|E_t|_{\lambda/4} = 73.2\,\mu\mathrm{V}$

Formulas Fresnel

- **Ondas - p (TM)**

$$\rho_p = \frac{\left(E_o^p\right)_r}{\left(E_o^p\right)_i} = \frac{Tan[\theta_i - \theta_t]}{Tan[\theta_i + \theta_t]} \quad ; \quad \tau_p = \frac{\left(E_o^p\right)_t}{\left(E_o^p\right)_i} = \frac{2\, Cos[\theta_i]\, Cos[\theta_t]}{Cos[\theta_i - \theta_t]\, Sin[\theta_i + \theta_t]}$$

- **Ondas - s (TE)**

$$\rho_s = \frac{(E_o^s)_r}{(E_o^s)_i} = -\frac{Sin[\theta_i - \theta_t]}{Sin[\theta_i + \theta_t]} \quad ; \quad \tau_s = \frac{(E_o^s)_t}{(E_o^s)_i} = \frac{2\, Cos[\theta_i]\, Cos[\theta_t]}{Sin[\theta_i + \theta_t]}$$