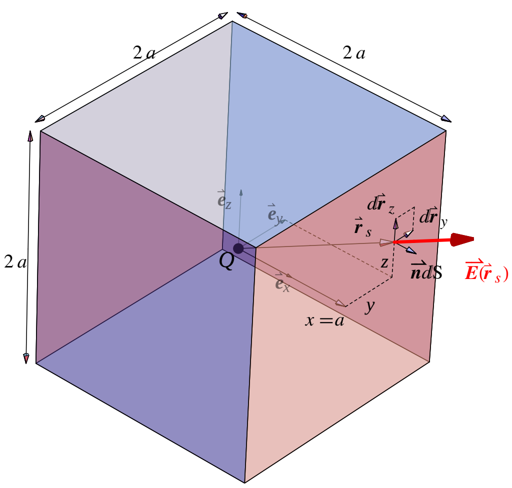
Eletromagnetismo e Ótica (MEC/LEGM)

3ª Semana

Problemas

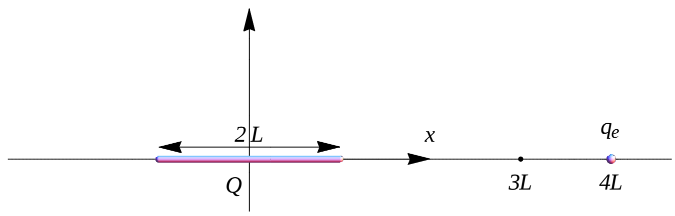
Probl. 1) Escreva a expressão integral para o cálculo do fluxo Φ do campo eléctrico $\vec{E}$ duma carga Q através da face de um cubo com arestas de comprimento $2\,a$ que passa por $x = a$ e está centrado na carga. Use de seguida argumentos de simetria e a Lei de Gauss para calcular o valor do integral em questão.



Respostas:

R. 1-a) $\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} \frac{Q\,a}{(a^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, d\,y\, d\,z \;=\; \frac{1}{6}\,\frac{Q}{\varepsilon_o}$

Probl. 2) Uma barra fina de comprimento $2\,L$ está uniformemente carregada com uma carga positiva de Q Coulombs.



a) Determine directamente o potencial elétrico $\varphi(x)$ a uma distância $x > L$ do centro da barra e na direção do seu eixo (assuma $\varphi(\infty) = 0$).

b) Qual seria a variação da energia potencial de um eletrão que se deslocasse de $x = 4\,L$ para $x = 3\,L$?

c) Qual seria a sua velocidade final se começasse do repouso?

d) É possivel deduzir o campo elétrico $\vec{E}(x)$ na região considerada a partir da expressão de $\varphi(x)$? Justifique a resposta!

Respostas:

R. 2-a) $\varphi(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{Q}{2\,L}\,\log\left(\frac{x+L}{x-L}\right)$

R. 2-b) $\Delta\,U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{q_e\,Q}{2\,L}\,\log\left(\frac{6}{5}\right)$

R. 2-c) $v_e == \sqrt{-\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_e\,Q}{m_e\,L}\log\left(\frac{6}{5}\right)}$

R. 2-d) Sim, porque por simetria só existe a componente $E_x(x) = -\partial_x\,\varphi(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{x^2-L^2}$ ao longo de $\vec{e}_x$.

Probl. 3) Um tubo cilíndrico ôco muito comprido é constituído por um material não-condutor, tem um raio interior R_1 e espessura constante a, e está uniformemente carregado com uma densidade de carga $\rho\left(\frac{C}{m^3}\right)$. Use a Lei de Gauss para determinar:

a) O campo elétrico $\vec{E}_o(r)$ dentro da cavidade do tubo, ou seja, para distâncias ao eixo $r < R_1$.

b) O campo elétrico $\vec{E}_1(r)$ entre as faces interior e exterior do tubo, assumindo que a permitividade elétrica aí é também ε_o.

c) O campo elétrico $\vec{E}_2(r)$ na vizinhança exterior do tubo não muito perto das extremidades.

d) Determine o potencial elétrico $\varphi(r)$ nas regiões mencionadas acima assumindo que φ=0 num ponto do eixo do tubo.

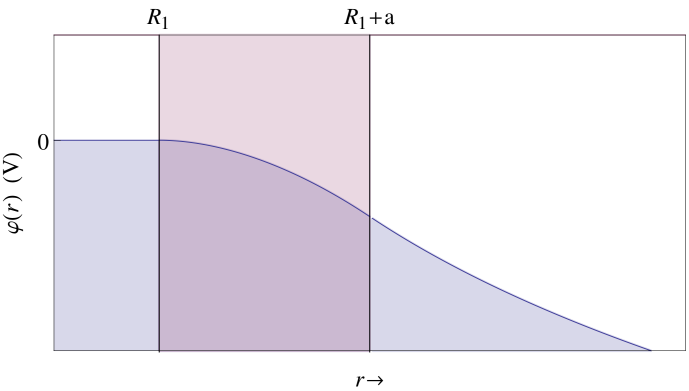
Respostas:

R. 3-a) $\vec{E}_o(\vec{r}) = 0$

R. 3-b) $\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{\rho\left(r^2-R_1{}^2\right)}{2\,\varepsilon_o\;r}\;\left(\frac{N}{C}\right)$

R. 3-c) $\vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{\rho\,a\,(a+2\,R_1)}{2\,\varepsilon_o\,r}\;\left(\frac{N}{C}\right)$

R. 3-d) $$\varphi(r) = \begin{cases} 0 & (0 \le r \le R_1) \\ \frac{\rho R_1^2}{4\,\varepsilon_o}\left(1 + 2\log\left(\frac{r}{R_1}\right) - \left(\frac{r}{R_1}\right)^2\right) & (R_1 \le r \le R_1 + a) \\ \varphi(R_1 + a) - \frac{\rho\;a\,(a+2\,R_1)}{2\,\varepsilon_o}\log\left(\frac{r}{a+R_1}\right) & (R_1 + a \le r) \end{cases}$$



Probl. 4) Dois planos verticais paralelos, práticamente infinitos, estão separados por uma distância $2\,d$ na direção $\vec{e}_x$. Um dos planos está uniformemente carregado com uma densidade de carga $\sigma_1\left(\frac{C}{m^2}\right)$, enquanto o outro possui uma densidade de carga $\sigma_2 = 2\,\sigma_1$.

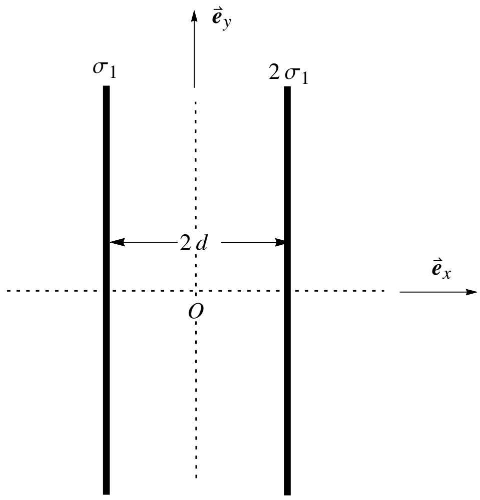
a) Use a Lei de Gauss para determinar o campo elétrico $\vec{E}$ em todas as regiões do espaço.

b) Determine a descontinuidade do campo elétrico $\vec{E}$ ao atravessar cada plano.

c) Determine a força (magnitude, direção e sentido) por unidade de área sentida por cada plano.

d) Determine o potencial elétrico φ em todas as regiões do espaço, assumindo que $\varphi = 0$ num ponto a igual distância dos planos.

e) Qual é a energia cinética que um electrão ganharia se fosse largado do repouso de uma das armaduras e acelerado pelo campo até atingir a outra? Há diferença na posição inicial do eletrão se os planos estiverem positiva ou negativamente carregados?



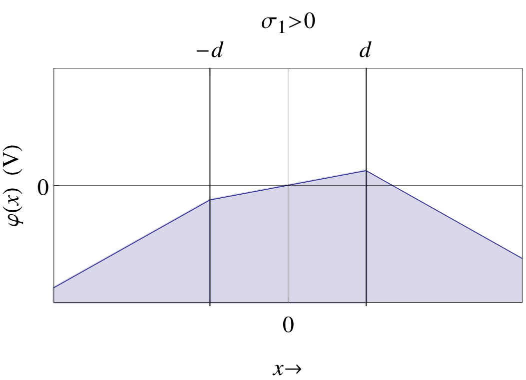
Respostas:

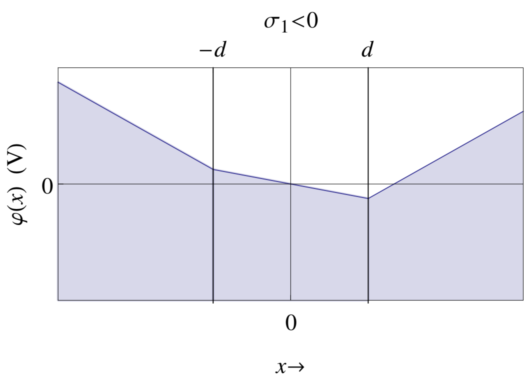
R. 4-a) $\overrightarrow{E}(\vec{r}) = \begin{cases} -\dfrac{3\sigma_1}{2\varepsilon_o}\,\vec{e}_x & (x < -d) \\ -\dfrac{\sigma_1}{2\varepsilon_o}\,\vec{e}_x & (-d < x < d) \\ +\dfrac{3\sigma_1}{2\varepsilon_o}\,\vec{e}_x & (d < x) \end{cases}$

R. 4-b) $\begin{cases} \Delta\overrightarrow{E}(-d) = \dfrac{\sigma_1}{\varepsilon_o} \\ \Delta\overrightarrow{E}(d) = \dfrac{2\sigma_1}{\varepsilon_o} \end{cases}$

R. 4-c) $\begin{cases} \dfrac{\Delta\overrightarrow{F}_1}{\Delta S} = -\dfrac{\sigma_1{}^2}{\varepsilon_o}\,\vec{e}_x \\ \dfrac{\Delta\overrightarrow{F}_2}{\Delta S} = \dfrac{\sigma_1{}^2}{\varepsilon_o}\,\vec{e}_x \end{cases}$

R. 4-d) $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\sigma_1\,(2d+3x)}{2\varepsilon_o} & (x < -d) \\ \dfrac{\sigma_1\,x}{2\varepsilon_o} & (-d < x < d) \\ \dfrac{\sigma_1\,(4d-3x)}{2\varepsilon_o} & (x > d) \end{cases}$





R. 4-e) $\Delta K = -q_e\,\dfrac{\sigma_1\,d}{\varepsilon_o}$

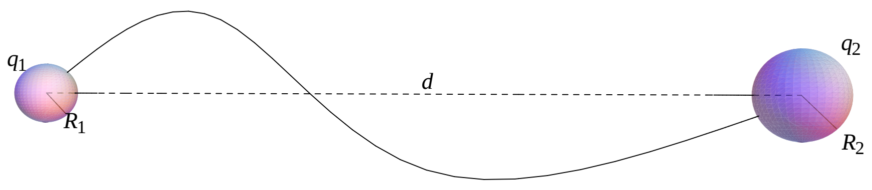
Probl. 5) Duas esferas condutoras, uma com um raio $R_1 = 4\,\text{cm}$ e a outra com um raio $R_2 = 6\,\text{cm}$, estão separadas por uma distância $d \gg R_1, R_2$. Inicialmente a esfera mais pequena continha uma carga $Q = 20\times10^{-6}\ C$, enquanto a outra estava descarregada. A certa altura estas esferas são ligadas por um longo fio condutor muito fino. Desprezando os efeitos de influência elétrica entre as esferas (por se encontrarem tão longe) e depois de cessar todo o movimento de cargas:

a) Qual vai ser a diferença de potencial entre as esferas?

b) Qual é a carga final em cada esfera? Como se encontra distribuída?

c) Qual é o potencial eléctrico φ de cada uma das esferas, assumindo $\varphi = 0$ no infinito?

d) Como é o campo elétrico $\vec{E}$ à superfície de cada uma das esferas? Que esfera possui o maior campo?



Respostas:

R. 5-a) $\Delta\varphi = 0$

R. 5-b) $$\begin{cases} q_1 = \dfrac{Q\,R_1}{R_1+R_2}\,\dfrac{\left(1-\frac{R_2}{d}\right)}{\left(1-\frac{2\,R_2}{d}\right)} \approx \dfrac{Q\,R_1}{R_1+R_2} \\ q_2 == \dfrac{Q\,R_2}{R_1+R_2}\,\dfrac{\left(1-\frac{R_1}{d}\right)}{\left(1-\frac{2\,R_2}{d}\right)} \approx \dfrac{Q\,R_2}{R_1+R_2} \end{cases}$$ à superfície.

R. 5-c) $\varphi_1 = \varphi_2 \approx \dfrac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_o}\,\dfrac{Q}{(R_1+R_2)} \quad (V)$

R. 5-d) $$\begin{cases} \vec{E}_1(R_1) = \dfrac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_o}\,\dfrac{Q}{(R_1+R_2)\,R_1}\,\vec{n}_1 \quad \left(\frac{N}{C}\right) \\ \vec{E}_2(R_2) = \dfrac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_o}\,\dfrac{Q}{(R_1+R_2)\,R_2}\,\vec{n}_2 \quad \left(\frac{N}{C}\right) \end{cases} \Longrightarrow \quad |\vec{E}_1| = \frac{R_2}{R_1}\,|\vec{E}_2|$$