Eletromagnetismo e Ótica (MEC/LEGM)

4ª Semana

Problemas

Probl. 1) Um cilindro condutor infinito, de raio R e carga λ por unidade de comprimento, está rodeado por um dielétrico de espessura infinita, cuja permitividade $\varepsilon = \varepsilon_o\left(1 + a\,\frac{R}{r}\right)$ varia com a distância r ao eixo do cilindro. Determine:

a) O campo elétrico $\vec{E}(\vec{r})$ em todas a regiões do espaço.

b) O potencial elétrico $\varphi(r)$ dentro e fora do cilindro.

c) O vector de polarização $\vec{P}(\vec{r})$.

d) A densidade de carga de polarização $\rho_p(\vec{r})$ no dielétrico.

e) A densidade de carga de polarização σ_p à superfície do dielétrico.

f) A carga total de polarização no dielétrico.

Respostas:

R. 1-a) $\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_o\,(r+aR)}\right)\vec{e}_r & (R < r) \\ \vec{E}(\vec{r}) = 0 & (r < R) \end{cases} \left(\frac{V}{m}\right)$

R. 1-b) $\begin{cases} \varphi(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_o}\,log\left(\frac{aR+r}{(a+1)R}\right) & (R < r) \\ \varphi(r) = 0 & (r < R) \end{cases} (V)$

R. 1-c) $\vec{P}(\vec{r}) = \frac{\lambda\,aR}{2\pi\;r\,(r+aR)}\,\vec{e}_r \quad \left(\frac{C}{m^2}\right)$

R. 1-d) $\rho_p(r) = \frac{\lambda\,aR}{2\pi\;r\,(r+aR)^2} \quad \left(\frac{C}{m^3}\right)$

R. 1-e) $\sigma_p(R) = -\frac{\lambda\,a}{2\pi\;R\,(1+a)} \quad \left(\frac{C}{m^2}\right)$

R. 1-f) $Q_p = 0$

Probl. 2) Um condensador esférico tem uma armadura interior de raio R_1 concêntrica com uma armadura exterior, de raio menor R_2 e raio maior R_3. O espaço entre as armaduras está preenchido com dois dielétricos LHI de permitividades ε_1 e ε_2, com uma superfície de contacto esférica à distância d do centro da armadura interior. Assumindo que a armadura interior tem uma carga $+Q$ e a armadura exterior está ligada à terra:

a) Determine o campo elétrico $\vec{E}(\vec{r})$ em todas as regiões do espaço.

b) Determine o potencial elétrico $\varphi(r)$ em função da distância r ao centro do condensador, assumindo que o potencial na terra é zero. Faça um gráfico do potencial em função de r.

c) Determine a capacidade C do condensador.

d) Calcule o vector de polarização $\vec{P}(\vec{r})$ nos dois dielétricos.

e) Identifique as regiões onde existem cargas de polarização e determine as respectivas densidades de carga e polaridade.

Respostas:

R. 2-a) $$\begin{cases} \vec{E} = 0 & (r < R_1 \ \ \& \ R_2 < r) \\ \vec{E} = \frac{Q_1}{4\pi\,\varepsilon_1}\,\frac{1}{r^2}\,\vec{e}_r & (R_1 \le r \le d) \\ \vec{E} = \frac{Q_1}{4\pi\,\varepsilon_2}\,\frac{1}{r^2}\,\vec{e}_r & (d \le r \le R_2) \end{cases}$$

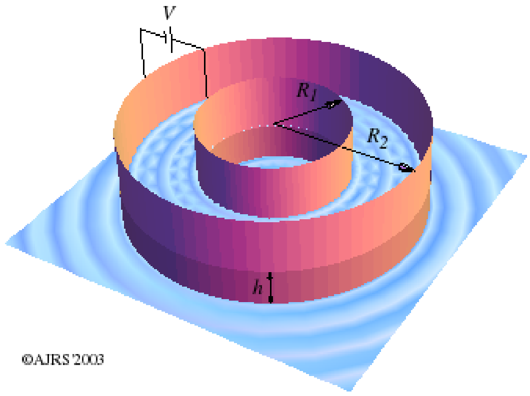
R. 2-b) $$\begin{cases} \varphi(r) = 0 & (R_2 < r) \\ \varphi(r) = \frac{Q_1}{4\pi\,\varepsilon_2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right) & (d \le r \le R_2) \\ \varphi(r) = \varphi(d) + \frac{Q_1}{4\pi\,\varepsilon_1}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{d}\right) & (R_1 \le r \le d) \\ \varphi(r) = \varphi(R_1) & (r < R_1) \end{cases}$$

R. 2-c) $$C = \frac{4\pi\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\,d\,\,R_1\,R_2}{\varepsilon_1\,R_1\,(R_2 - d) + \varepsilon_2\,R_2\,(d - R_1)} \quad (F)$$

R. 2-d) $$\begin{cases} \vec{P} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_o)\,Q_1}{4\pi\,\varepsilon_1}\,\frac{1}{r^2}\,\vec{e}_r & (R_1 \le r \le d) \\ \vec{P} = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_o)\,Q_1}{4\pi\,\varepsilon_2}\,\frac{1}{r^2}\,\vec{e}_r & (d \le r \le R_2) \end{cases}$$

R. 2-e) $$\begin{cases} \sigma_p(R_1) = -\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_o)}{4\pi\,\varepsilon_1}\,\frac{Q_1}{{R_1}^2} \\ \sigma_p(d) = \frac{\varepsilon_o\,(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{4\pi\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2}\,\frac{Q_1}{d^2} \\ \sigma_p(R_2) = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_o)}{4\pi\,\varepsilon_2}\,\frac{Q_1}{{R_2}^2} \\ \rho_p(r) \equiv 0 \end{cases}$$

Probl. 3) Um condensador cilíndrico constituído por dois tubos ôcos de raios R_1 e R_2 e comprimento L são parcialmente imersos sobre um líquido dielétrico de densidade ρ e permitividade ε. Uma bateria fornece uma tensão V entre as armaduras dos condensadores.



a) Determine a expressão do campo elétrico $\vec{E}(\vec{r})$ entre as armaduras nas regiões secas e molhadas.

b) Assumindo que o condensador está mergulhado até uma profundidade ℓ desde a superfície do líquido, e que este sobe até uma altura h acima da superfície dentro do condensador, determine as cargas elétricas Q_1 e Q_2 armazenadas nas partes seca e molhada da armadura interior.

c) Determine a capacidade $C(\ell,\,h)$ do condensador nesta situação.

d) Determine altura h a que o líquido ascende dentro do condensador.

Respostas:

R. 3-a) $$\begin{cases} \vec{E}\,(\vec{r}) = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_o}\,\frac{R_1}{r} & \text{na região seca} \\ \vec{E}\,(\vec{r}) = \frac{\sigma_2}{\varepsilon}\,\frac{R_1}{r} & \text{na região molhada} \end{cases}$$

R. 3-b) $$\begin{cases} Q_1 = \frac{2\pi\,\varepsilon_o\,V\,(L-\ell-h)}{\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \\ Q_2 = \frac{2\pi\,\varepsilon\,V\,(\ell+h)}{\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \end{cases}$$

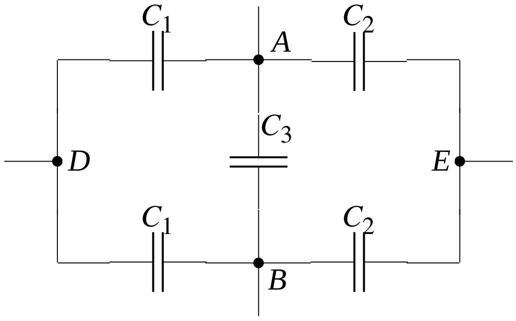
R. 3-c) $$C(\ell,\,h) = \frac{2\pi\,((\varepsilon-\varepsilon_o)\,(\ell+h) + \varepsilon_o\,L)}{\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \quad (F)$$

R. 3-d) $$C(\ell,\,h) = \frac{2\pi\,((\varepsilon-\varepsilon_o)\,(\ell+h) + \varepsilon_o\,L)}{\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \quad (F)$$

Probl. 4) Considere o seguinte diagrama dum circuito com capacidades $C_1 = 10\ pF$, $C_2 = 20\ pF$ e $C_3 = 30\ pF$.

a) Determine a capacidade equivalente C_{eq} do sistema entre os pontos AB.

b) Determine a capacidade equivalente C_{eq} do sistema entre os pontos DE.



Respostas:

R. 4-a) $C_{eq} = 45\ pF$

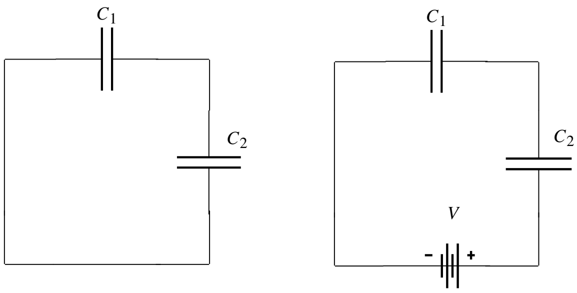
R. 4-b) $C_{eq} = \frac{40}{3}\ pF$

Probl. 5) Um condensador de capacidade $C_1 = 10\ \mu F$ é carregado até atingir uma tensão $V_o = 15\ V$. Depois é ligado em série com um condensador descarregado de capacidade $C_2 = 5\ \mu F$ em circuito aberto.

a) Explique o que acontece às cargas e tensões dos condensadores C_1 e C_2 nessas condições.

b) Quando o circuito é fechado como na figura (a) determine as cargas Q_1, Q_2 e tensões V_1, V_2 para os condensadores C_1 e C_2.

c) Assumindo agora que o circuito é fechado em série com uma bateria que pode fornecer uma tensão $V = 50\ V$, como indicado na figura (b), determine as cargas e tensões nos condensadores.



(a) (b)

Respostas:

R. 5-a) Nada.

R. 5-b) $Q_1 = C_1\, V_1$; $Q_2 = C_2\, V_2$; $V_1 = \frac{C_1\, V_o}{C_1 + C_2}$; $V_2 = -\frac{C_1\, V_o}{C_1 + C_2}$

R. 5-c) $Q_1 = C_1\, V_1$; $Q_2 = C_2\, V_2$; $V_1 = \frac{C_1\, V_o - C_2\, V}{C_1 + C_2}$; $V_2 = -\frac{C_1\, (V + V_o)}{C_1 + C_2}$