

Electromagnetismo e Óptica

Quarta, 13 Novembro, 2013
MEC LEGM

Coeficientes de Indução :

Fluxo magnético através de um circuito

- ◆ É sempre possível escrever o fluxo magnético através de um circuito γ percorrido por uma corrente I_γ , devido ao campo gerado por essa e outras correntes I_β em outros tantos circuitos, por uma expressão linear nas correntes, com coeficientes de indução que dependem apenas da geometria e posições relativas dos circuitos.

$$\Phi_\gamma = L_\gamma I_\gamma + \sum_{\beta \neq \gamma} M_{\gamma\beta} I_\beta$$

Demonstração

- ◆ Tendo em conta que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ e que $\int \int_{S_\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_\gamma \vec{A} \cdot d\vec{l}$, obtemos para uma distribuição de circuitos β, γ, \dots com correntes I_γ, I_β, \dots que geram o campo $\vec{B} = \vec{B}_\gamma + \vec{B}_\beta + \dots$ os fluxos

$$\Phi_\gamma = \int \int_{S_\gamma} \vec{B}(\vec{s}) \cdot d\vec{S}_\gamma(\vec{s}) = \int \int_{S_\gamma} \vec{B}_\gamma(\vec{s}) \cdot d\vec{S}_\gamma(\vec{s}) + \sum_{\beta \neq \gamma} \oint_\gamma \vec{A}_\beta(\vec{l}_\gamma) \cdot d\vec{l}_\gamma$$

A partir das expressões gerais para estes campos

$$\vec{A}_\beta(\vec{l}_\gamma) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_\beta \oint_\beta \frac{d\vec{l}_\beta}{|\vec{l}_\gamma - \vec{l}_\beta|} \quad ; \quad \vec{B}_\gamma(\vec{s}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_\gamma \oint_\gamma \frac{d\vec{l}_\gamma \times (\vec{s} - \vec{l}_\gamma)}{|\vec{s} - \vec{l}_\gamma|^3}$$

vemos que, pondo em evidência as correntes, se obtêm coeficientes que dependem apenas da geometria e posições relativas dos circuitos, designados **Coeficientes de Indução**.

$$\Phi_\gamma = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int \int_{S_\gamma} \oint_\gamma \frac{d\vec{l}_\gamma \times (\vec{s} - \vec{l}_\gamma)}{|\vec{s} - \vec{l}_\gamma|^3} \cdot d\vec{S}(\vec{s}) \right) I_\gamma + \sum_{\beta \neq \gamma} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_\gamma \oint_\beta \frac{d\vec{l}_\beta \cdot d\vec{l}_\gamma}{|\vec{l}_\gamma - \vec{l}_\beta|} \right) I_\beta$$

Coeficiente de Auto-Indução

$$L_{\gamma} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S_{\gamma}} \oint_{\gamma} \frac{d\vec{l}_{\gamma} \times (\vec{s} - \vec{l}_{\gamma})}{|\vec{s} - \vec{l}_{\gamma}|^3} \cdot d\vec{S}(\vec{s}) \quad (H)$$

Coeficientes de Indução Mútua

$$M_{\gamma\beta} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\gamma} \oint_{\beta} \frac{d\vec{l}_{\beta} \cdot d\vec{l}_{\gamma}}{|\vec{l}_{\gamma} - \vec{l}_{\beta}|} \quad (H)$$

Solenóide com N espiras e secção S , entreferro de permeabilidade μ :

- ◆ Para uma corrente I , tem-se

$$\Phi = N \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{S}} = N \left(\mu \frac{N}{L} I \right) S = \mu \frac{N^2}{L} S I$$

- ◆ Coeficiente de Auto Indução:

$$L = \frac{d\Phi}{dI} = \frac{\mu N^2 S}{L} \text{ (Henry)}$$

Toróide com N espiras e raios R e r , entreferro de permeabilidade μ :

- ◆ Para uma corrente I , tem-se no interior

$$B = \frac{\mu N I}{2 \pi R}$$

sendo $S = \pi r^2$.

- ◆ Coeficiente de Auto Indução:

$$L = \frac{d\Phi}{dI} = \frac{\mu N^2 r^2}{2 R} \quad (H)$$

Bobina toroidal com entreferro de permeabilidade μ :

- ◆ Uma bobina toroidal, com 1 m de raio exterior e 20 cm de raio interior, é percorrida por uma corrente de 5.0 A e tem 60 espiras por metro. No centro tem ferro com uma permeabilidade magnética $\mu = 5000 \mu_0$. Qual seria o campo na ausência do ferro? Qual é a indutância desta bobina? Qual é o campo magnético com o ferro? Qual é a indutância nesse caso?

Solução

O comprimento total da bobina é $L = 2 \pi R = 6.28 \text{ m}$ pelo que o número total de espiras é $N = 60 \times L = 377$.

No interior da bobina, dado que o raio exterior $R = 1 \text{ m}$ é muito maior que o raio interior $r = 0.2 \text{ m}$, vamos considerar que o campo \vec{B} é aproximadamente constante em cada secção recta da bobina.

Óbviamente, devido à simetria de rotação em torno do eixo do toro, o campo numa secção obtém-se do campo de qualquer outra secção através da rotação que converte uma na outra.

A utilização da Lei de Ampère ao longo duma circunferência γ de raio R passando pelo centro do toro permite-nos determinar a componente azimutal $B_\theta \vec{e}_\theta$ do campo \vec{B} .

Em coordenadas cilíndricas $\{r, \theta, z\}$ com eixo \vec{e}_z coincidente com o eixo do toro devemos escrever, parametrizando a circunferência γ com o ângulo azimutal $\theta \in [0, 2\pi]$:

- ◆ ponto sobre a circunferência γ

$$\vec{r}_\gamma = R \vec{e}_r(\theta) \equiv R \{\cos[\theta], \sin[\theta], 0\}$$

- ◆ trajecto infinitesimal sobre a circunferência γ

$$d\vec{r}_\gamma = R d\theta \vec{e}_\theta(\theta) \equiv R d\theta \{-\sin[\theta], \cos[\theta], 0\}$$

- ◆ pela simetria axial B_θ não depende de θ

$$\oint_\gamma \vec{B}(\vec{r}_\gamma) \cdot d\vec{r}_\gamma = \int_0^{2\pi} B_\theta(R) R d\theta = B_\theta(R) 2\pi R$$

- ◆ N é o número total de espiras na bobina

$$B_\theta(R) 2\pi R = \mu_0 NI$$

- ◆ magnitude da componente B_θ

$$B_\theta(R) = \mu_0 \frac{NI}{2\pi R} = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{377 \times 5}{2\pi \times 1} \approx 3.7 \text{ (G)}$$

- ◆ Em qualquer outro ponto no interior da bobina assumimos que B_θ tem a mesma magnitude que $B_\theta(R)$. Para o fluxo do campo através de uma secção recta da bobina ($\vec{S} = S \vec{e}_\theta$) correspondente a uma só espira obtemos

$$\phi = \int \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_\theta(R) S = \mu_0 \frac{NI}{2\pi R} \pi r^2$$

Como as linhas de campo atravessam de forma semelhante todas as N espiras da bobina, o fluxo total é

$$\Phi = N\phi = \mu_0 \frac{N^2 r^2}{2R} I = L_o I$$

Da expressão anterior obtemos a indutância

$$L_o = \frac{d\Phi}{dI} = \mu_0 \frac{N^2 r^2}{2R}$$

$$L_o = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{377^2 \times 0.2^2}{2 \times 1} = 3.57 \times 10^{-3} \text{ (H)}$$

Quando consideramos o núcleo de ferro deve-se substituir μ_0 por $\mu = 5000 \mu_0$, pelo que

$$B_\theta(R) = \mu \frac{NI}{2\pi R} = 5000 \times 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{377 \times 5}{2\pi \times 1} \approx 1.85 \text{ (T)}$$

$$L_f = \mu \frac{N^2 r^2}{2R} = 5000 L_o = 17.86 \text{ (H)}$$

Apêndice:

- ◆ Se não quisermos fazer a aproximação de considerar B_θ constante dentro do solenóide, podemos concluir pelo mesmo raciocínio usando a lei de Ampère que, a uma distância ρ do eixo \vec{e}_z dentro do solenóide,

$$B_\theta(r) = \mu_0 \frac{NI}{2\pi r}$$

- ◆ O cálculo do fluxo numa secção é agora, parametrizando a secção recta circular com $\{s, \theta\}$ em que $s \in [0, r]$, $\theta \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned} \phi &= \int \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_0^r \int_0^{2\pi} B_\theta(R+s) s d\theta ds = \\ &= \mu_0 \frac{NI}{2\pi} 2\pi \int_0^r \frac{s}{R+s} ds = \\ &= \mu_0 NI \left(r + R \log\left(\frac{R}{r+R}\right) \right) \approx \mu_0 NI \left(\frac{r^2}{2R} - \frac{r^3}{3R^2} + \mathcal{O}\left(\frac{r}{R}\right)^4 \right) \end{aligned}$$

- ◆ A expressão para a indutância é neste caso

$$L_o = \mu_0 N^2 \left(r + R \log\left(\frac{R}{r+R}\right) \right)$$

- ◆ Quando $\frac{r}{R} \approx 0$ o desenvolvimento em série de Taylor do Logaritmo mostra que esta expressão reduz-se à deduzida quando considerámos $B_\theta(r) = B_\theta(R)$ constante em toda a secção do toro.

Cabo coaxial, raio do condutor interno a, raio do condutor externo b:

- ◆ Campo à distância r do condutor interno, usando a Lei de Ampère

$$B(r) = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

Fluxo através da secção longitudinal de comprimento L

$$\Phi = \int_0^L \int_a^b B(r) d\ell dr = \frac{L\mu}{2\pi} \log\left(\frac{b}{a}\right) I$$

Coeficiente de Auto Indução:

$$L = \frac{d\Phi}{dI} = \frac{\mu L}{2\pi} \log\left(\frac{b}{a}\right) \quad (H)$$

Dois fios paralelos de raio a à distância D um do outro, com correntes opostas:

- ◆ Pela Lei de Ampère

$$\begin{cases} B_1(r) 2\pi r = \mu_0 I \\ B_2(D-r) 2\pi(D-r) = \mu_0 I \end{cases} \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I D}{2\pi r(D-r)}$$

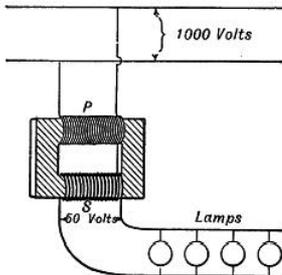
O fluxo através da superfície entre os dois condutores num comprimento L é

$$\Phi = \int_0^L \int_a^{D-a} B(r) \, dl \, dr = \frac{\mu_0 L D}{2\pi} I \int_a^{D-a} \frac{dr}{r(D-r)} = \frac{\mu_0 L D}{2\pi} \log\left(\frac{D-a}{a}\right) I$$

- ◆ Coeficiente de Auto Indução:

$$L = \frac{d\Phi}{dI} = \frac{\mu_0 L D}{2\pi} \log\left(\frac{D-a}{a}\right) \quad (H)$$

Problema: Transformador com N_p espiras no primário e N_s espiras no secundário com entreferro de secção S



- Fluxo no Primário com corrente I_p e número total de espiras N_p num comprimento l . Em cada espira do primário o fluxo de \vec{B} corresponde ao do seu próprio campo mais o do secundário:

$$\psi_p = \frac{\mu N_p I_p}{l_p} S_p + \psi_{sp}$$

No primário o fluxo total será

$$\Phi_p = N_p \psi_p = N_p \left(\frac{\mu N_p}{l_p} I_p S_p + \psi_{sp} \right)$$

O coeficiente de auto-indução L_p no primário será

$$\Phi_p = L_p I_p + M_{sp} I_s \quad \Rightarrow \quad L_p = \frac{\mu S_p}{l_p} N_p^2 \quad ; \quad M_{sp} I_s = N_p \psi_{sp}$$

- Fluxo no Secundário:

$$\Phi_s = N_s \psi_s = N_s \left(\frac{\mu N_s I_s}{l_s} S_s + \psi_{ps} \right)$$

Se tivéssemos $\psi_s = \psi_p$,

$$\Phi_s = N_s \left(\frac{\mu N_p I_p}{l_p} S_p + \psi_{sp} \right) = \frac{\mu S_p}{l_p} N_p N_s I_p + N_s \psi_{sp} = M_{ps} I_p + L_s I_s$$

$$\Rightarrow L_s I_s = N_s \psi_{sp} \quad \therefore$$

$$\psi_{sp} = \frac{\mu S_s}{l_s} N_s I_s \quad \Rightarrow \quad M_{sp} = \frac{\mu S_s}{l_s} N_s N_p$$

$$L_s = \frac{\mu S_s}{l_s} N_s^2 \quad ; \quad M_{ps} = \frac{\mu S_p}{l_p} N_s N_p \quad (\neq M_{sp} \text{ ?? })$$

$$\Phi_s = \frac{\mu S_p}{l_p} N_s N_p I_p + \frac{\mu S_s}{l_s} N_s^2 I_s = N_s \psi_{ps} + \frac{\mu S_s}{l_s} N_s^2 I_s$$

$$\psi_{ps} = \frac{\mu S_p}{\ell_p} N_p I_p$$

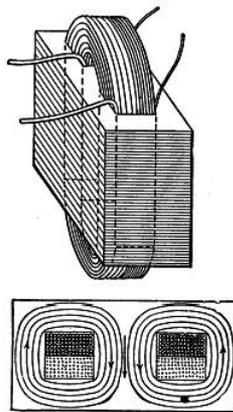
Como se verifica, assumindo a preservação do fluxo em ambas secções do núcleo leva a uma contradição quando $S_p \neq S_s$. Portanto deve haver uma perda de fluxo dependendo da geometria.

- ◆ Assumindo então que $\psi_p = \gamma \psi_s$ para um factor γ a determinar, podemos prosseguir assumindo agora as equações básicas

$$\psi_p = \gamma \psi_s ; \quad \begin{cases} \Phi_p = N_p \psi_p = L_p I_p + M I_s \\ \Phi_s = N_s \psi_s = M I_p + L_s I_s \end{cases} ; \quad \begin{cases} L_p = \mu \frac{N_p^2}{\ell_p} S_p \\ L_s = \mu \frac{N_s^2}{\ell_s} S_s \end{cases}$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{S_p \ell_s}{\ell_p S_s}} \quad \begin{cases} \psi_p = \frac{\mu N_p I_p}{\ell_p} S_p + \mu N_s I_s \sqrt{\frac{S_p S_s}{\ell_p \ell_s}} = \left(B_p + B_s \sqrt{\frac{S_s \ell_s}{S_p \ell_p}} \right) S_p \\ \psi_s = \mu N_p I_p \sqrt{\frac{S_p S_s}{\ell_p \ell_s}} + \frac{\mu N_s I_s}{\ell_s} S_s = \left(B_p \sqrt{\frac{S_p \ell_p}{S_s \ell_s}} + B_s \right) S_s \\ M = \mu N_p N_s \sqrt{\frac{S_p S_s}{\ell_p \ell_s}} = \sqrt{L_p L_s} \end{cases}$$

- ◆ Assim, só no caso de $\gamma = 1$ é que se tem uma igualdade $\psi_p = \psi_s$, o que é garantido nas mais frequentes geometrias enrolando o primário e o secundário à volta do mesmo troço do núcleo.



- ◆ Podemos usar a aproximação dos circuitos magnéticos para o cálculo de coeficientes de indução de um transformador com primário de secção S_p e comprimento L_p , secundário de secção S_s e comprimento L_s e braços de secção S_b e comprimento L_b . As equações do circuito são

$$\begin{cases} N_p I_p + N_s I_s = \mathcal{R}_p \psi_p + \mathcal{R}_s \psi_s + 2 \mathcal{R}_b \psi_b \\ \psi_p = \psi_b = \psi_s \end{cases}$$

onde as relutâncias são

$$\begin{cases} \mathcal{R}_p = \frac{L_p}{\mu S_p} \\ \mathcal{R}_s = \frac{L_s}{\mu S_s} \\ \mathcal{R}_b = \frac{L_b}{\mu S_b} \end{cases}$$

Conclui-se assim que

$$\mathcal{R}_{eq} = \mathcal{R}_p + \mathcal{R}_s + 2 \mathcal{R}_b \quad \text{e} \quad \psi_p = \psi_s = \frac{N_p}{\mathcal{R}_{eq}} I_p + \frac{N_s}{\mathcal{R}_{eq}} I_s$$

$$\begin{cases} \Phi_p = N_p \psi_p = L_p I_p + M I_s \\ \Phi_s = N_s \psi_s = M I_p + L_s I_s \end{cases}$$

donde se conclui que

$$L_p = \frac{N_p^2}{\mathcal{R}_{eq}} \quad ; \quad L_s = \frac{N_s^2}{\mathcal{R}_{eq}} \quad ; \quad M = \frac{N_s N_p}{\mathcal{R}_{eq}} \quad \text{com} \quad \mathcal{R}_{eq} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{L_p}{S_p} + \frac{L_s}{S_s} + 2 \frac{L_b}{S_b} \right)$$

Forças Electromotrizes:

$$\varepsilon_p = -N_p \frac{d\psi_p}{dt} \quad ; \quad \varepsilon_s = -N_s \frac{d\psi_p}{dt}$$

$$\varepsilon_s = \frac{N_s}{N_p} \varepsilon_p$$