

# Electromagnetismo e Óptica

Segunda, 18 Novembro, 2013  
MEC LEGM

# Lei de Faraday-Lenz

## Fluxo magnético através de uma superfície

$$\Phi(t) = \iint_S \vec{B}(\vec{s}, t) \cdot d\vec{S}(\vec{s}) \quad (Wb = \text{Weber} \equiv Vs)$$

## Força electromotriz de indução magnética

- ◆ A variação temporal do fluxo magnético  $\Phi$  através de um circuito condutor fechado faz aparecer uma força electromotriz que actua no sentido de induzir uma corrente eléctrica cujo campo magnético contrarie a alteração do fluxo inicial.

$$\mathcal{E}_{em} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

## Lei de Faraday: Campo $\vec{B}$ variável no tempo

- ◆ O fluxo magnético através de um circuito fechado pode variar porque o campo magnético muda no tempo e/ou porque a geometria e localização do circuito mudam no tempo relativamente ao campo magnético.

$$\mathcal{E}_{em} = - \frac{d\Phi}{dt} \equiv - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_{\partial S} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r}$$

## Lei de Faraday quando $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ mas $\vec{v} \neq 0$ .

- ◆ Quando o campo magnético é estacionário mas o circuito é móvel a força electromotriz induzida é

$$\mathcal{E}_{em} = \oint_{\gamma} \frac{\vec{F}_m}{q} \cdot d\vec{r} = \oint_{\gamma} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = - \frac{d}{dt} \iint_{S_{\gamma}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

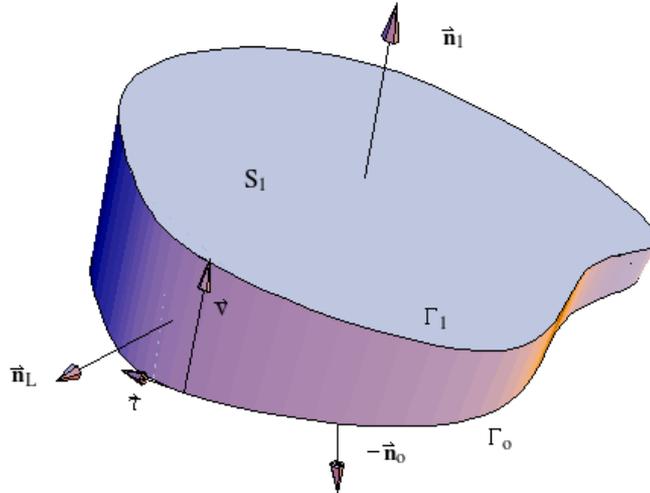
## Fluxo através de Superfície Móvel

- ◆ Em geral a variação temporal do fluxo de um campo variável  $\vec{a}$  através de uma superfície móvel  $S(\vec{s}, t)$ , onde  $\vec{s}$  representa a posição dum ponto sobre a superfície, é

$$\frac{d}{dt} \iint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iint_S \left( \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + (\nabla \cdot \vec{a}) \frac{d\vec{s}}{dt} + \nabla \times \left( \vec{a} \times \frac{d\vec{s}}{dt} \right) \right) \cdot d\vec{S}$$

ou seja, usando o teorema de Stokes no último termo,

$$\frac{d\Phi_{\vec{a}}}{dt} = \iint_S \left( \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + (\nabla \cdot \vec{a}) \frac{d\vec{s}}{dt} \right) \cdot d\vec{S} + \oint_{\partial S} \left( \vec{a} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \cdot d\vec{r}(t)$$



### Demonstração

- ◆ Para o campo magnético  $\vec{B}$  a ausência de divergência ( $\nabla \cdot \vec{B} \equiv 0$ ) significa

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{B} dV = \iint_{S_1} \vec{B}(\vec{s}_1, t_1) \cdot d\vec{S}(\vec{s}_1) + \iint_{S_L} \vec{B}(\vec{s}_L, t_1) \cdot d\vec{S}(\vec{s}_L) - \iint_{S_0} \vec{B}(\vec{s}_0, t_1) \cdot d\vec{S}(\vec{s}_0) = 0$$

onde a superfície  $S_0$  está orientada da mesma forma que  $S_1$ , e não “para fora” do volume  $V$ .

- ◆ Por definição

$$\frac{d\Phi}{dt} = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{1}{t_1 - t_0} \left( \iint_{S_1} \vec{B}(\vec{s}_1, t_1) \cdot d\vec{S}(\vec{s}_1) - \iint_{S_0} \vec{B}(\vec{s}_0, t_0) \cdot d\vec{S}(\vec{s}_0) \right)$$

Substituindo aqui o integral em  $S_1$  pelos integrais em  $S_0$  e  $S_L$  da fórmula resultante da divergência nula de  $\vec{B}$  obtemos

$$\frac{d\Phi}{dt} = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{1}{t_1 - t_0} \left( \iint_{S_0} \vec{B}(\vec{s}_0, t_1) \cdot d\vec{S}(\vec{s}_0) - \iint_{S_0} \vec{B}(\vec{s}_0, t_0) \cdot d\vec{S}(\vec{s}_0) \right) - \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{\iint_{S_L} \vec{B}(\vec{s}_L, t_1) \cdot d\vec{S}(\vec{s}_L)}{t_1 - t_0}$$

O primeiro limite é

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{\left( \iint_{S_0} \vec{B}(\vec{s}_0, t_1) \cdot d\vec{S}(\vec{s}_0) - \iint_{S_0} \vec{B}(\vec{s}_0, t_0) \cdot d\vec{S}(\vec{s}_0) \right)}{t_1 - t_0} \rightarrow \boxed{\iint_{S_0} \frac{\partial \vec{B}(\vec{s}_0, t_0)}{\partial t} \cdot d\vec{S}(\vec{s}_0)}$$

O limite do integral sobre a superfície lateral é

$$- \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \left( \frac{\iint_{S_L} \vec{B}(\vec{s}_L, t_1) \cdot d\vec{S}(\vec{s}_L)}{t_1 - t_0} \right) \rightarrow \boxed{\oint_{\Gamma_0 = \partial S_0} \left( \vec{B}(\vec{r}_0, t_0) \times \frac{d\vec{r}_0}{dt} \right) \cdot d\vec{r}_0}$$

porque

$$d\vec{S}(\vec{S}_L) \approx (t_1 - t_0) \vec{v} \times \vec{r} d\ell_0 = (t_1 - t_0) \frac{d\vec{r}_0}{dt} \times d\vec{r}_0$$

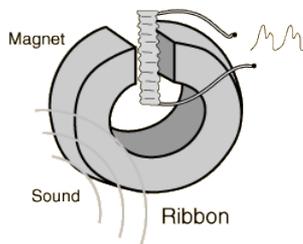
e ainda

$$\vec{B}(\vec{r}_0, t_0) \cdot \left( \frac{d\vec{r}_0}{dt} \times d\vec{r}_0 \right) \equiv \left( \vec{B}(\vec{r}_0, t_0) \times \frac{d\vec{r}_0}{dt} \right) \cdot d\vec{r}_0$$

## Exemplos:

*Espira rectangular rodando em campo magnético fixo*  
*Barra condutora deslocando-se num campo magnético fixo.*

## Exemplos de Aplicação : Correntes de Foucault



Auscultador e Microfone

Segurança de Electromagnetes

Levitação de Anel de Alumínio em cima dum solenoide com AC

Motores: Disco metálico com ferromagnete AC parcialmente blindado

Campo magnético rotativo: entreferro toroidal com solenóides diametralmente opostos emparelhados com correntes AC circulando em sentidos opostos e passando de solenóide em solenóide.

Travão magnético.

Gerador trifásico.

Medição de velocidade de correntes marítimas.