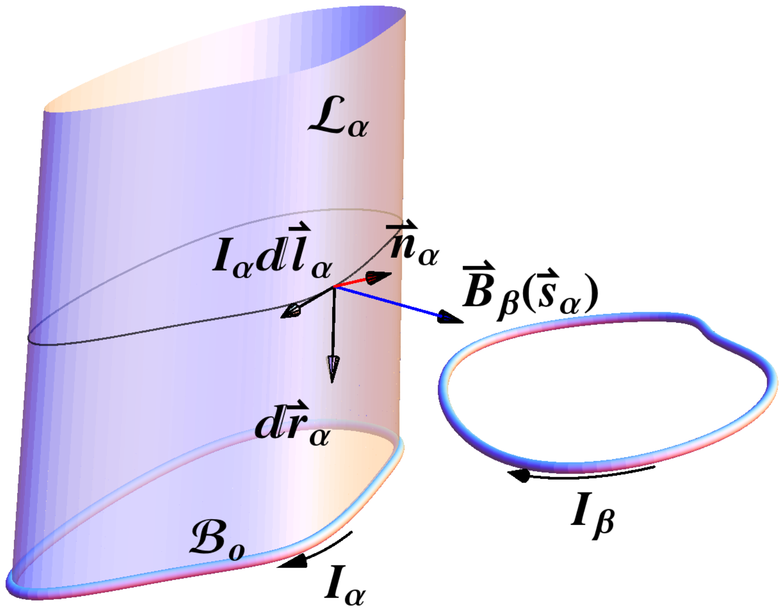
Electromagnetismo
e
Óptica

Quarta, 20 Novembro, 2013

MEC LEGM

Energia no campo magnético

Energia Magnética de Translação:



$$(U_m)_{tr} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha} \mathrm{I}_\alpha \sum_{\beta\neq\alpha} \Phi_{\alpha\beta}$$

- Consideremos que os circuitos são transportados, um a um, do infinito para a sua posição final. O primeiro circuito desloca-se num espaço sem outros campos que o seu próprio, mas os seguintes têm que se deslocar no campo gerado pelas correntes que já se encontram em posição.
- Cada circuito α pode ser descrito por uma parametrização conveniente $\gamma_\alpha : \theta \in [0, 2\pi] \to \vec{\ell}_\alpha(\theta)$ representando a posição final do circuito.
- Designando por $\Gamma_a : s \in \mathbb{R}_+ \to \vec{r}_\alpha(s)$ uma curva do ∞ até à origem, então $\vec{s}_\alpha(s, \theta) = \vec{r}_\alpha(s) + \vec{\ell}_\alpha(\theta)$ representa um ponto de um tubo que o circuito α descreve quando é transladado desde o infinito até à sua posição final. Veremos adiante que a escolha do caminho Γ_α é irrelevante para o resultado final.
- Note que o deslocamento dos circuitos é feito de forma infinitamente lenta, isto é não é necessária energia adicional para combater forças electromotrizes induzidas nos circuitos pela Lei de Faraday e manter as respectivas correntes constantes à medida que cada circuito é colocado em posição.
- Teremos contudo que contabilizar separadamente a energia gasta a estabelecer a corrente I_α em cada circuito inicialmente.

Por outro lado, para cada par de circuitos é irrelevante se um é colocado na posição final primeiro que o outro, ou seja o trabalho $U_{\alpha\beta}$ necessário para colocar o circuito α em posição no campo de β quando β já está fixo é o mesmo que o trabalho $U_{\beta\alpha}$ de colocar β em posição no campo de α quando α já está fixo. Assim

$$(U_m)_{tr} = \sum_{\alpha} U_\alpha = \sum_{\alpha}\sum_{\beta<\alpha} U_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha}\sum_{\beta\neq\alpha} U_{\alpha\beta}$$

Designando por $\vec{\boldsymbol{F}}_{\alpha\beta}(s)$ a força total sentida por α quando se encontra na posição parametrizada por s

$$U_{\alpha\beta} = \int_{\Gamma_\alpha} \vec{\boldsymbol{F}}_{\alpha\beta} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}_\alpha = \int_{\Gamma_\alpha} \left(\oint_{\gamma_\alpha} \mathrm{I}_\alpha \, d\vec{\ell}_\alpha \times \vec{\boldsymbol{B}}_\beta \right) \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}_\alpha =$$

$$= \mathrm{I}_\alpha \int_{\Gamma_\alpha} \oint_{\gamma_\alpha} \left(d\vec{\boldsymbol{r}}_\alpha \times d\vec{\ell}_\alpha \right) \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_\beta$$

$$U_{\alpha\beta} = -\mathrm{I}_\alpha \iint_{\mathcal{L}} \vec{\boldsymbol{B}}_\beta \cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = \mathrm{I}_\alpha \left(\int_{\mathcal{B}} \vec{\boldsymbol{B}}_\beta \cdot d\vec{\boldsymbol{S}} + \int_{\mathcal{B}_0} \vec{\boldsymbol{B}}_\beta \cdot d\vec{\boldsymbol{S}} \right)$$

$$U_{\alpha\beta} = \mathrm{I}_\alpha \int_{\mathcal{B}} \vec{\boldsymbol{B}}_\beta \cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = \mathrm{I}_\alpha \, \Phi_{\alpha\beta}$$

Energia Magnética individual

- Consideremos um circuito RLC com uma bateria proporcionando uma q.d.p. V e uma indutância criando uma força electromotriz de indução magnética $\mathcal{E}_{\text{em}} = -L\,\frac{d\mathrm{I}}{dt}$. A equação do circuito é então

$$V + \mathcal{E}_{em} = \mathrm{I}\,R + \frac{Q}{C}$$

A potência dispendida pela bateria é

$$\mathcal{P}_b = \mathrm{I}\,V = R\,\mathrm{I}^2 + \mathrm{I}\,\frac{Q}{C} - \mathrm{I}\,\mathcal{E}_{em} = R\,\mathrm{I}^2 + \frac{Q}{C}\,\mathrm{I} + \mathrm{I}\,\frac{d\Phi}{dt}$$

A energia fornecida ao circuito é dada pelo integral no tempo da potência:

$$\Delta \mathrm{U}_b = \int_0^t \mathcal{P}_b\,dt = \int_0^t R\,\mathrm{I}^2\,dt + \int_0^t \frac{Q}{C}\,\frac{dQ}{dt}\,dt + \int_0^t \mathrm{I}\,\frac{d\Phi}{dt}\,dt =$$
$$= \int_0^t \mathcal{P}_d\,dt + \frac{1}{2}\,\frac{Q^2(t)}{C} + \int_0^{\Phi_t} \mathrm{I}\,d\Phi$$

O termo $R\,\mathrm{I}^2$ representa a perda ohmica da resistência. O termo $\frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{C}$ é a energia eléctrica armazenada no condensador C, e o último termo representa a energia magnética armazenada na indutância L.

Como $\Phi = L\,\mathrm{I}$, esta energia magnética pode ser escrita em termos da corrente

$$U_{m_L} = \int_0^{\Phi_t} \mathrm{I}\,d\Phi = \frac{1}{2}\,L\,\mathrm{I}^2(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{I}(t)\,\Phi(t)$$

Energia Magnética Total:

$$\begin{cases} U_{m_{tr}} = \frac{1}{2}\sum_\alpha \mathrm{I}_\alpha \sum_{\beta\neq\alpha} \Phi_{\alpha\beta} \\ \\ U_{m_{def}} = \frac{1}{2}\sum_\alpha \mathrm{I}_\alpha\,\Phi_{\alpha\alpha} \end{cases} \implies U_m = \frac{1}{2}\sum_\alpha \mathrm{I}_\alpha\,\Phi_\alpha$$

$$\left(\Phi_\alpha = \Phi_{\alpha\alpha} + \sum_{\beta\neq\alpha} \Phi_{\alpha\beta}\right)$$

Densidade de Energia Magnética

Densidade de Energia Magnética u_m no campo de um solenóide

Se a indutância fôr um solenóide com N espiras, secção A e comprimento $h \gg \sqrt{A}$, a densidade de energia armazenada dentro deste pode ser vista como

$$u_m = \frac{U_m}{A\,h} = \frac{\frac{1}{2}L\,\mathrm{I}^2}{A\,h} = \frac{1}{2}\left(\mu_o N^2 A\,h\right)\frac{\mathrm{I}^2}{A\,h} = \frac{1}{2}\frac{(\mu_o N\,\mathrm{I})^2}{\mu_o} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_o}$$

ou seja

$$u_m = \frac{1}{2}\mu_o H^2$$

Densidade de energia magnética no caso geral.

Identidade matemática: Fluxo Magnético em termos do potencial vector.

$$\Phi_S = \iint_S \vec{\boldsymbol{B}}\cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = \iint_S \nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}\cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = \oint_{\partial S}\vec{\boldsymbol{A}}\cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}$$

Energia armazenada no campo magnético gerado por um conjunto arbitrário de correntes I_α

$$U_m = \frac{1}{2}\sum_\alpha \mathrm{I}_\alpha \Phi_\alpha = \frac{1}{2}\sum_\alpha \oint_\alpha \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{\ell}}_\alpha)\cdot\left(\mathrm{I}_\alpha\, d\vec{\boldsymbol{\ell}}_\alpha\right) \qquad \rightleftharpoons \qquad U_m = \frac{1}{2}\iiint \vec{\boldsymbol{A}}\cdot\vec{\boldsymbol{J}}\, dV$$

Identidade matemática: $\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\left(\nabla\times\vec{\boldsymbol{b}}\right) = \nabla\cdot\left(\vec{\boldsymbol{a}}\times\vec{\boldsymbol{b}}\right) + \vec{\boldsymbol{b}}\cdot\left(\nabla\times\vec{\boldsymbol{a}}\right)$

Usando a Lei de Ampère local $\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}} = \vec{\boldsymbol{J}}$ obtém-se

$$\vec{\boldsymbol{A}}\cdot\vec{\boldsymbol{J}} = \vec{\boldsymbol{A}}\cdot\left(\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}\right) = \nabla\cdot\left(\vec{\boldsymbol{H}}\times\vec{\boldsymbol{A}}\right) + \vec{\boldsymbol{H}}\cdot\left(\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}\right) = \nabla\cdot\left(\vec{\boldsymbol{H}}\times\vec{\boldsymbol{A}}\right) + \vec{\boldsymbol{H}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}}$$

Substituindo na expressão da energia do campo magnético e usando a definição de divergência para o campo $\vec{\boldsymbol{H}}\times\vec{\boldsymbol{A}}$

$$U_m = \frac{1}{2}\iiint \vec{\boldsymbol{H}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}}\, dV + \frac{1}{2}\oiint_\infty \left(\vec{\boldsymbol{H}}\times\vec{\boldsymbol{A}}\right)\cdot d\vec{\boldsymbol{S}}_\infty$$

Assumindo que no infinito o campo é nulo, o fluxo de $\vec{\boldsymbol{H}}\times\vec{\boldsymbol{A}}$ na superfície no infinito também se anula, e esta expressão reduz-se a

$$U_m = \frac{1}{2}\iiint \vec{\boldsymbol{H}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}}\, dV = \frac{1}{2}\iiint u_m\, dV$$

Assim a densidade de energia armazenada no campo magnético em cada ponto dum espaço com permeabilidade magnética μ é

$$u_m = \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{H}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2}\mu H^2$$

Pressão Magnética na interface entre dois meios

Pressão Magnética na interface entre dois meios

Mantendo os fluxos constantes

Variação de Energia magnética com a introdução de um meio de volume V_1 e permeabilidade μ_1 num campo pré-existente $\vec{\boldsymbol{B}}_o$ num meio μ_o

$$(\Delta U_m)_\Phi = \iiint_{V_1} \frac{1}{2}\left(\vec{\boldsymbol{B}}_1\cdot\vec{\boldsymbol{H}}_1 - \vec{\boldsymbol{B}}_o\cdot\vec{\boldsymbol{H}}_o\right) dV_1 =$$

$$-\iiint_{V_1} \frac{1}{2}\left(\vec{\boldsymbol{B}}_1\cdot\vec{\boldsymbol{H}}_o - \vec{\boldsymbol{B}}_o\cdot\vec{\boldsymbol{H}}_1\right) dV_1 + \iiint_{V_1} \frac{1}{2}\left(\vec{\boldsymbol{B}}_1 - \vec{\boldsymbol{B}}_o\right)\cdot\left(\vec{\boldsymbol{H}}_1 + \vec{\boldsymbol{H}}_o\right) dV_1$$

Na ausência de correntes de condução $\vec{\boldsymbol{J}}_c$ no volume V_1

$$\nabla\times\left(\vec{\boldsymbol{H}}_1 + \vec{\boldsymbol{H}}_o\right) = 0 \iff \exists\ \psi: \quad \vec{\boldsymbol{H}}_1 - \vec{\boldsymbol{H}}_o = \nabla\psi$$

Então, usando a identidade

$$\nabla\cdot\left(\psi\,\vec{\boldsymbol{a}}\right) = \vec{\boldsymbol{a}}\cdot\nabla\psi + \psi\,\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{a}}$$

$$\left(\vec{\boldsymbol{B}}_1 - \vec{\boldsymbol{B}}_o\right)\cdot\left(\vec{\boldsymbol{H}}_1 + \vec{\boldsymbol{H}}_o\right) = \left(\vec{\boldsymbol{B}}_1 - \vec{\boldsymbol{B}}_o\right)\cdot\nabla\psi = \nabla\cdot\left(\psi\left(\vec{\boldsymbol{B}}_1 - \vec{\boldsymbol{B}}_o\right)\right) - \psi\,\nabla\cdot\left(\vec{\boldsymbol{B}}_1 - \vec{\boldsymbol{B}}_o\right)$$

Mas $\nabla\cdot\left(\vec{\boldsymbol{B}}_1 - \vec{\boldsymbol{B}}_o\right) \equiv 0$ sempre, pelo que

$$\iiint_{V_1} \frac{1}{2}\left(\vec{\boldsymbol{B}}_1 - \vec{\boldsymbol{B}}_o\right)\cdot\left(\vec{\boldsymbol{H}}_1 + \vec{\boldsymbol{H}}_o\right) dV_1 = \iiint_{V_1} \frac{1}{2}\nabla\cdot\left(\psi\left(\vec{\boldsymbol{B}}_1 - \vec{\boldsymbol{B}}_o\right)\right) dV_1 =$$

$$= \iint_{\partial V_1} \frac{1}{2}\psi\left(\vec{\boldsymbol{B}}_1 - \vec{\boldsymbol{B}}_o\right)\cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = 0$$

devido à continuidade da componente normal de $\vec{\boldsymbol{B}}$ na passagem entre os dois meios.

Para um sistema isolado, o trabalho realizado pelos campos deve verificar

$$\Delta W_{mec} + (\Delta U_m)_\Phi = 0$$

$$\Delta \mathrm{W}_{mec} = -(\Delta U_m)_\Phi = \iiint_{V_1} \frac{1}{2}\left(\vec{\boldsymbol{B}}_1\cdot\vec{\boldsymbol{H}}_o - \vec{\boldsymbol{B}}_o\cdot\vec{\boldsymbol{H}}_1\right) dV_1 =$$

$$= \iiint_{V_1} \frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_o)\,\vec{\boldsymbol{H}}_1\cdot\vec{\boldsymbol{H}}_o\, dV$$

$$= \iiint_{V_1} \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1 - \mu_o}{\mu_1\,\mu_o}\right)\vec{\boldsymbol{B}}_1\cdot\vec{\boldsymbol{B}}_o\, dV$$

Mantendo as Correntes Constantes

Contudo, na presença de correntes de condução no volume V_1, para manter constantes as correntes é também necessário realizar trabalho contra as forças electromotrizes de indução magnética ΔW_{fem}, que em geral são o dobro da variação de energia armazenada no campo $(\Delta \mathrm{U}_m)_J$.

$$(\Delta U_m)_J = \iiint_{V_1} \frac{1}{2}\left(\vec{\boldsymbol{B}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{H}}_1 - \vec{\boldsymbol{B}}_o \cdot \vec{\boldsymbol{H}}_o\right) dV_1 =$$

$$\iiint_{V_1} \frac{1}{2}\left(\vec{\boldsymbol{B}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{H}}_o - \vec{\boldsymbol{B}}_o \cdot \vec{\boldsymbol{H}}_1\right) dV_1 + \iiint_{V_1} \frac{1}{2}\left(\vec{\boldsymbol{B}}_1 + \vec{\boldsymbol{B}}_o\right) \cdot \left(\vec{\boldsymbol{H}}_1 - \vec{\boldsymbol{H}}_o\right) dV_1$$

Como $\nabla \cdot \left(\vec{\boldsymbol{B}}_1 + \vec{\boldsymbol{B}}_o\right) = 0$ existe um campo $\vec{\boldsymbol{A}}$ tal que $\vec{\boldsymbol{B}}_1 + \vec{\boldsymbol{B}}_o = \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}$, pelo que

$$\nabla \cdot \left(\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\right) = \vec{\boldsymbol{b}} \cdot \left(\nabla \times \vec{\boldsymbol{a}}\right) - \vec{\boldsymbol{a}} \cdot \left(\nabla \times \vec{\boldsymbol{b}}\right)$$

$$\left(\vec{\boldsymbol{B}}_1 + \vec{\boldsymbol{B}}_o\right) \cdot \left(\vec{\boldsymbol{H}}_1 - \vec{\boldsymbol{H}}_o\right) = \left(\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}\right) \cdot \left(\vec{\boldsymbol{H}}_1 - \vec{\boldsymbol{H}}_o\right) = \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \left(\nabla \times \left(\vec{\boldsymbol{H}}_1 - \vec{\boldsymbol{H}}_o\right)\right) + \nabla \cdot \left(\vec{\boldsymbol{A}} \times \left(\vec{\boldsymbol{H}}_1 - \vec{\boldsymbol{H}}_o\right)\right)$$

Se as correntes se mantêm constantes após a introdução do meio de permeabilidade μ_1 então $\nabla \times \vec{\boldsymbol{H}}_o = \vec{\boldsymbol{J}}_c = \nabla \times \vec{\boldsymbol{H}}_1$

$$\nabla \times \left(\vec{\boldsymbol{H}}_1 - \vec{\boldsymbol{H}}_o\right) = 0$$

pelo que

$$\iiint_{V_1} \frac{1}{2}\left(\vec{\boldsymbol{B}}_1 + \vec{\boldsymbol{B}}_o\right) \cdot \left(\vec{\boldsymbol{H}}_1 - \vec{\boldsymbol{H}}_o\right) dV_1 =$$

$$\iiint_{V_1} \frac{1}{2} \nabla \cdot \left(\vec{\boldsymbol{A}} \times \left(\vec{\boldsymbol{H}}_1 - \vec{\boldsymbol{H}}_o\right)\right) dV_1 = \iint_{\partial V_1} \frac{1}{2} \vec{\boldsymbol{A}} \times \left(\vec{\boldsymbol{H}}_1 - \vec{\boldsymbol{H}}_o\right) \cdot d\vec{\boldsymbol{S}}_1 = 0$$

porque, decompondo $\vec{\boldsymbol{H}}$ em componentes tangenciais e normais à superfície ∂V_1, e dada a continuidade das componentes tangenciais na fronteira, obtém-se

$$\vec{\boldsymbol{A}} \times \left(\vec{\boldsymbol{H}}_1 - \vec{\boldsymbol{H}}_o\right) \cdot d\vec{\boldsymbol{S}}_1 = \vec{\boldsymbol{A}} \times \left(\vec{\boldsymbol{H}}_1^{\perp} - \vec{\boldsymbol{H}}_o^{\perp}\right) \cdot d\vec{\boldsymbol{S}}_1 = 0$$

já que $\vec{\boldsymbol{A}} \times \left(\vec{\boldsymbol{H}}_1^{\perp} - \vec{\boldsymbol{H}}_o^{\perp}\right)$ resulta perpendicular a $d\vec{\boldsymbol{S}}_1$ qualquer que seja $\vec{\boldsymbol{A}}$.
Assim

$$\begin{aligned}(\Delta U_m)_J &= \iiint_{V_1} \frac{1}{2}\left(\vec{\boldsymbol{B}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{H}}_o - \vec{\boldsymbol{B}}_o \cdot \vec{\boldsymbol{H}}_1\right) dV_1 \\ &= \iiint_{V_1} \frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_o)\,\vec{\boldsymbol{H}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{H}}_o\, dV_1 \\ &= \iiint_{V_1} \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1 - \mu_o}{\mu_1\,\mu_o}\right)\vec{\boldsymbol{B}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{B}}_o\, dV\end{aligned}$$

Para um sistema isolado contendo as fontes necessárias para contrariar os efeitos das forças de indução magnética nas correntes, a variação total de energia verifica

$$\Delta W_{mec} + (\Delta U_m)_J + \Delta W_{fem} = 0$$

$$\therefore$$

$$\Delta W_{mec} + (\Delta U_m)_J - 2\,(\Delta U_m)_J = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta W_{mec} = (\Delta U_m)_J$$

Pressão electrostática

No limite em que o volume V_1 introduzido corresponde a um deslocamento infinitesimal $d\vec{\boldsymbol{r}}$ de uma fronteira entre dois meios semi-infinitos de permeabilidades diferentes $dV_1 = d\vec{\boldsymbol{S}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$ então podemos considerar que

$$(\Delta U_m)_J = \iint_{\mathcal{S}} \frac{1}{2} (\mu_1 - \mu_o) \vec{\boldsymbol{H}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{H}}_o \, d\vec{\boldsymbol{S}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$$

$$= \iint_{\mathcal{S}} \frac{1}{2} (\mu_1 - \mu_o) \left(\vec{\boldsymbol{H}}_1^{\parallel} \cdot \vec{\boldsymbol{H}}_o^{\parallel} + \vec{\boldsymbol{H}}_1^{\perp} \cdot \vec{\boldsymbol{H}}_o^{\perp}\right) d\vec{\boldsymbol{S}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$$

Devido à continuidade das componentes tangenciais de $\vec{\boldsymbol{H}}$ e normais de $\vec{\boldsymbol{B}}$ na superfície $\mathcal{S}$ podemos escrever

$$(\Delta U_m)_J = \iint_{\mathcal{S}} \frac{1}{2} (\mu_1 - \mu_o) \left(|\vec{\boldsymbol{H}}_o^{\parallel}|^2 + \frac{1}{\mu_1 \, \mu_o} |\vec{\boldsymbol{B}}_o^{\perp}|^2 \right) d\vec{\boldsymbol{S}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$$

pelo que, designando por p_m a pressão magnética na superfície fronteira

$$\Delta W_{mec} = \iint_{\mathcal{S}} p_m \, \vec{\boldsymbol{n}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} \, dS = \iint_{\mathcal{S}} \frac{1}{2} (\mu_1 - \mu_o) \left(|\vec{\boldsymbol{H}}_o^{\parallel}|^2 + \frac{1}{\mu_1 \, \mu_o} |\vec{\boldsymbol{B}}_o^{\perp}|^2 \right) \vec{\boldsymbol{n}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} \, dS$$

Conclui-se assim que na fronteira entre dois meios de permeabilidade diferentes existe uma pressão no sentido do meio de mais fraca premeabilidade:

$$p_m = \frac{1}{2} (\mu_1 - \mu_o) \left(|\vec{\boldsymbol{H}}_o^{\parallel}|^2 + \frac{1}{\mu_1 \, \mu_o} |\vec{\boldsymbol{B}}_o^{\perp}|^2 \right)$$

Para um campo de $1\,T$ essencialmente perpendicular à superfície de V_1, com $\mu_1 \gg \mu_o$, a pressão obtida sobre o material é de quase 4 atmosferas!

$$p_m \simeq \frac{1}{2\,\mu_o} |\vec{\boldsymbol{B}}_o^{\perp}|^2 = \frac{10^7}{8\,\pi} \frac{N}{m^2} = 3.92\,Atm$$