# Electromagnetismo
# e
# Óptica

Segunda, 25 Novembro, 2013

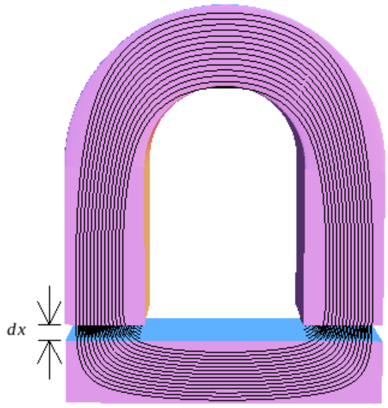
MEC LEGM

# Forças Magnéticas

## *Trabalho realizado sobre um corpo mantendo os fluxos constantes:*

$$\Delta W_{mec} = -(\Delta U_m)_\Phi$$

- Exemplo: Força de atração de um magnete em ferradura, de secção $S$.




Considerando o circuito magnético formado pelas linhas de campo, e assumindo que um deslocamento $dx$ da barra não altera o fluxo no circuito,

$$(dU_m)_\Phi = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_o} 2\,S\,dx$$

A força sobre a barra será atractiva

$$\Delta W_{mec} = F_x\,dx = -\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_o} 2\,S\,dx$$

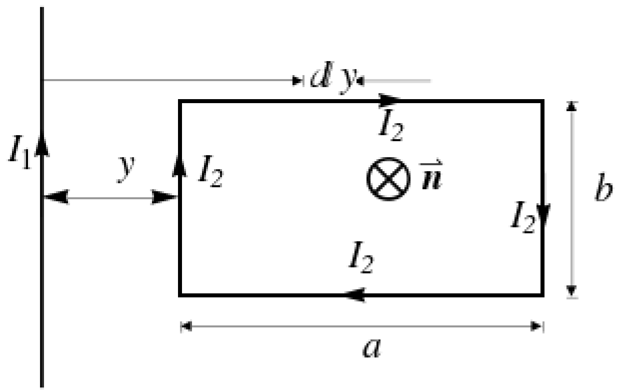
Para $B = 1\,T$ e $S = 10^{-1}\,m^2$

$$F_x = -\frac{1}{\mu_o} B^2 S = -\frac{1}{4\pi 10^{-7}} 1^2 \times 10^{-1} = -\left(8 \times 10^4\right) N$$

## *Trabalho realizado sobre um corpo mantendo as correntes constantes*

$$\Delta W_{mec} = +(\Delta U_m)_\mathrm{I}$$

- Força sobre uma espira rectangular com corrente $\mathrm{I}_2$ no campo de um fio rectilíneo com corrente $\mathrm{I}_1$.




A energia magnética é

$$U_m = \frac{1}{2}\left(L_1\,\mathrm{I}_1 + M_{12}\,\mathrm{I}_2\right)\mathrm{I}_1 + \frac{1}{2}\left(L_2\,\mathrm{I}_2 + M_{21}\,\mathrm{I}_1\right)\mathrm{I}_2 =$$

$$\frac{1}{2}\left(L_1\,\mathrm{I}_1^2 + L_2\,\mathrm{I}_2^2 + 2\,M_{12}\,\mathrm{I}_1\,\mathrm{I}_2\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{I}_1\,\Phi_{11} + \mathrm{I}_2\,\Phi_{22} + 2\,\mathrm{I}_2\,\Phi_{12}\right)$$

Quando a distância entre a espira e a corrente se altera, os auto-fluxos ficam invariantes (mantendo-se as correntes constantes) pelo que:

$$\Delta W_m = (\Delta U_m)_{\mathrm{I}} = \mathrm{I}_2\,\Delta\Phi_{12}$$

O fluxo do campo $\vec{\boldsymbol{B}}_1 = \frac{\mu_o\,\mathrm{I}_1}{2\,\pi\,r}\,\vec{\boldsymbol{e}}_\theta$ na espira é

$$\Phi_{12} = \iint_{S_2} \vec{\boldsymbol{B}}_1 \cdot d\vec{\boldsymbol{S}}_2 = \int_0^b \int_y^{y+a} \frac{\mu_o\,\mathrm{I}_1}{2\,\pi\,r}\,dr\,dz = \frac{\mu_o\,\mathrm{I}_1\,b}{2\,\pi}\,log\left(\frac{a+y}{y}\right)$$

A força sobre a espira é:

$$F_y = \mathrm{I}_2\,\frac{d\Phi_{12}}{dy} = -\frac{\mu_o\,\mathrm{I}_1\,\mathrm{I}_2}{2\,\pi}\,\frac{a\,b}{y\,(y+a)}$$

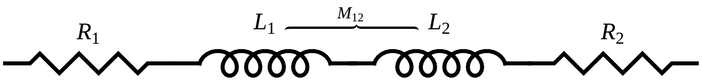
Usando as forças de Lorentz:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \oint \mathrm{I}_2\,d\vec{\ell} \times \vec{\boldsymbol{B}}_1 = \left(-b\,\mathrm{I}_2\,\frac{\mu_o\,\mathrm{I}_1}{2\,\pi\,y} + b\,\mathrm{I}_2\,\frac{\mu_o\,\mathrm{I}_1}{2\,\pi\,(y+a)}\right)\vec{\boldsymbol{e}}_y = -\frac{\mu_o\,\mathrm{I}_1\,\mathrm{I}_2}{2\,\pi}\,\frac{a\,b}{y\,(y+a)}\,\vec{\boldsymbol{e}}_y$$

# Aplicação às leis dos circuitos eléctricos fixos

$$\mathcal{E}(\gamma) = -\frac{d\Phi_\gamma}{dt} = -L_\gamma \frac{d\mathrm{I}_\gamma}{dt} - \sum_{\beta \neq \gamma} M_{\gamma\beta} \frac{d\mathrm{I}_\beta}{dt}$$

## *Indutâncias em série*




Para duas indutâncias em série num circuito com duas resistências $R_1$ e $R_2$ numa queda de potencial ‹ deve ser

$$V + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = R_1 \mathrm{I} + R_2 \mathrm{I}$$

Assim

$$V = (R_1 + R_2)\mathrm{I} + (L_1 + 2M_{12} + L_2)\frac{d\mathrm{I}}{dt}$$

Este circuito é assim equivalente a um com uma indutância

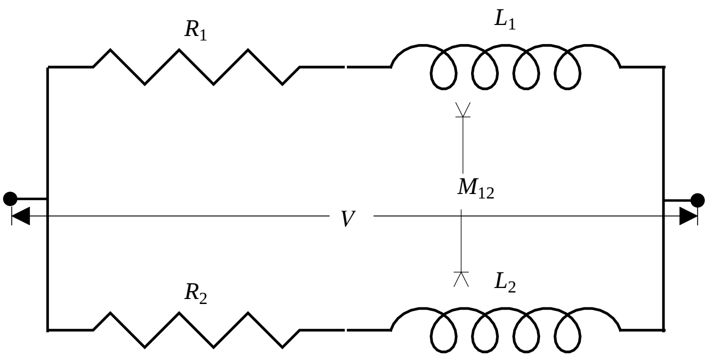
$$L_{eq} = L_1 + 2M_{12} + L_2$$

Se $M_{12} \ll L_1$, $L_2$ então para indutâncias em série

$$L_{eq} \approx L_1 + L_2$$

Se $M = k\sqrt{L_1 L_2}$ com $|k| < 1$ e $k$ puder variar temos um circuito de indutância variável (rádio).

## *Indutâncias em paralelo*




Assumindo agora um circuito composto por duas indutâncias em paralelo numa queda de potencial $V$, desprezando as resistências de cada indutância,

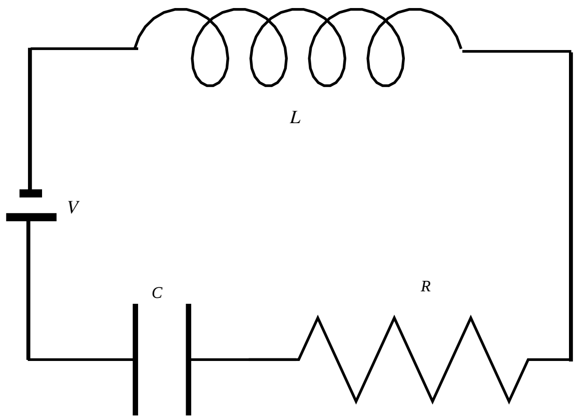
$$\begin{cases} V = L_1 \dfrac{d\mathrm{I}_1}{dt} + M_{12}\dfrac{d\mathrm{I}_2}{dt} \\ V = L_2 \dfrac{d\mathrm{I}_2}{dt} + M_{12}\dfrac{d\mathrm{I}_1}{dt} \end{cases} \Longrightarrow \quad V = \frac{L_1 L_2 - M_{12}^2}{L_1 + L_2 - 2M_{12}} \frac{d\mathrm{I}}{dt}$$

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M_{12}^2}{L_1 + L_2 - 2 M_{12}}$$

Se $M_{12} \ll L_1, L_2$ então para indutâncias em paralelo

$$\frac{1}{L_{eq}} \approx \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

## Circuito RLC




$$\mathcal{E}_{tot} = \oint \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\ell} = \mathcal{E}_{bat} + \mathcal{E}_{ind}$$

Em partes do circuito em que este apresenta uma condutibilidade $\sigma_e = \frac{1}{\rho_e}$, a Lei de Ohm $\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\vec{\boldsymbol{J}}}{\sigma_e}$ pode ser aplicada. Dado que $\mathrm{I} = \vec{\boldsymbol{J}} \cdot \vec{\boldsymbol{S}}$ e em geral $\vec{\boldsymbol{S}} \parallel d\vec{\ell}$, tem-se:

$$\int \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\ell} = \int \frac{\vec{\boldsymbol{J}}}{\sigma_e} \cdot d\vec{\ell} = \mathrm{I} \int \frac{\rho_e}{S} d\ell = R\,\mathrm{I}$$

Contudo no espaço entre placas de um condensador não existe condutibilidade, e nesse pedaço

$$\int \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{C} Q(t)$$

$$\mathcal{E}_{bat} + \mathcal{E}_{ind} = \mathcal{E}_{bat} - L \frac{d\,\mathrm{I}(t)}{dt} = R\,\mathrm{I}(t) + \frac{1}{C} Q(t)$$

Quando $\mathcal{E}_{\mathrm{bat}} = V = C^{\mathrm{te}}$:

$$L \frac{d^2 \mathrm{I}(t)}{dt^2} + R \frac{d\mathrm{I}(t)}{dt} + \frac{1}{C} \mathrm{I}(t) = 0$$

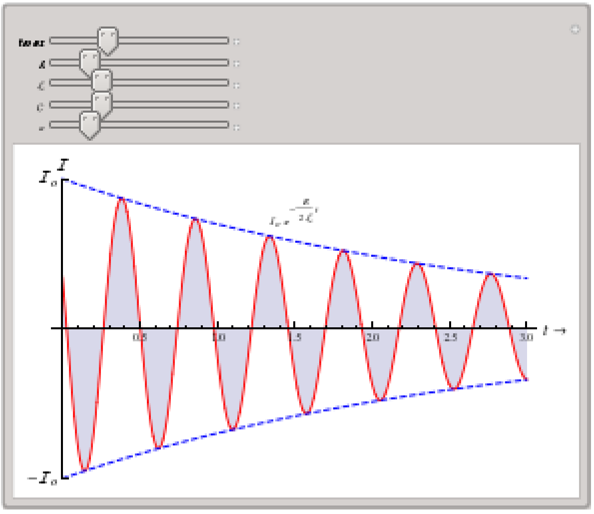
Para uma solução complexa do tipo $\mathrm{I}_c(t) = \mathrm{I}_o\, e^{\kappa t}$

$$\kappa^2 + \frac{R}{L}\kappa + \frac{1}{LC} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \kappa = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Quando $\lambda = \frac{R}{2L} \ll \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ a solução é

$$\mathrm{I}_c(t) = \mathrm{I}_c(0)\, e^{-\lambda t}\, e^{\pm i\,\omega_n t} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{I}(t) = \mathrm{I}_o\, e^{-\lambda t}\, Sin(\omega_n t + \alpha)$$

onde $\omega_n = \sqrt{\omega_o{}^2 - \lambda^2}$ se designa a **frequência natural** de oscilação e $\mathrm{I}_c(0) = \mathrm{I}_o\, e^{i\,\alpha}$.



## *Circuitos com correntes de variação lenta.*

- A restrição a correntes de variação lenta significa que o circuito não deve radiar uma quantidade grande de potência.
- Isto significa que as dimensões máximas do circuito são pequenas quando comparadas com o comprimento de onda da radiação associada à frequência motriz no circuito $\ell_{\text{max}} \ll \frac{c}{f} = \lambda$.
- Ou seja, um elemento de corrente $\mathrm{I}\, d\vec{\ell}$ do circuito encontra-se a uma distância muito pequena, quando comparado com o comprimento de onda $\lambda$, dum elemento de corrente $-\mathrm{I}\, d\vec{\ell}$, pelo que os seus campos cancelam-se a grande distância em todas as direcções.

## *Regimes Transiente e Estacionário.*

Quando $\mathcal{E}_{\text{bat}}(t) = V_o\, e^{i\,\omega\, t}$:

$$L\,\frac{d^2\mathrm{I}(t)}{d t^2} + R\,\frac{d\mathrm{I}(t)}{d t} + \frac{1}{C}\,\mathrm{I}(t) = i\,\omega\, V_o\, e^{i\,\omega\, t}$$

Para uma solução complexa do tipo $\mathrm{I}_c(t) = \mathrm{I}_o\, e^{i\,\omega\, t}$

$$\left(-L\,\omega^2 + R\; i\;\omega + \frac{1}{C}\right)\mathrm{I}_o\, e^{i\,\omega\, t} = i\,\omega\, V_o\, e^{i\,\omega\, t}$$

$$\mathrm{I}_o = \frac{1}{R + i\left(\omega\, L - \frac{1}{\omega\, C}\right)}\, V_o$$

- A constante complexa

$$Z = R + i\left(\omega\, L - \frac{1}{\omega\, C}\right)$$

designa-se a **Impedância** do circuito, e consiste numa parte real $R$ (**Resistência**) e uma parte complexa, designada **Reactância**, a qual tem uma parte **inductiva** $\omega L$ e uma parte **capacitativa** $\frac{1}{\omega C}$.

$$\mathrm{I}_c(t) = \frac{1}{Z} V_c(t)$$

$$\mathrm{I}(t) = \frac{1}{|Z|} V(t) = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos\left(\omega t + \tan^{-1}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)\right)$$

## Impedâncias em Série e Paralelo em circuitos com corrente alterna

- A impedância complexa $Z$ tem uma parte real $\mathcal{R}$ (Resistência) e uma parte imaginária $\mathcal{X}$ (Reactância)

$$Z = \mathcal{R} + i\,\mathcal{X}$$

### *Resistência*

$$\mathcal{R} = R$$

### *Reactâncias*

$$\mathcal{X} = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

### *Serie*

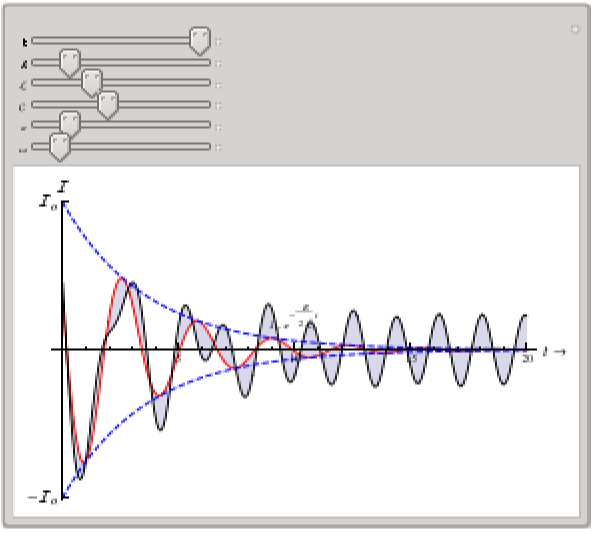
$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \ldots$$

### *Paralelo*

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \ldots$$

### *Regime Transiente*

- A solução da equação homogénea dá-nos uma solução evanescente geral, que adicionada à solução particular encontrada acima nos dá a solução completa com condições iniciais apropriadas



## Potência Instantânea e Potência Média.

◆ Para voltagens e correntes complexas a potência instantânea é

$$\mathcal{P}(t) = Re[\mathrm{I}_c(t)]\, Re[V_c(t)]$$

A potência média é

$$\langle \mathcal{P} \rangle = Lim\, \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{P}(t)\, dt = \frac{1}{2} Re[\mathrm{I}_o^* V_o] = \frac{1}{2} \frac{|V_o|^2}{|Z|^2} Re[Z^*]$$

A voltagem e corrente efectivas são definidas como

$$V_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}} |V_o| \quad ; \quad \mathrm{I}_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}} |\mathrm{I}_o|$$

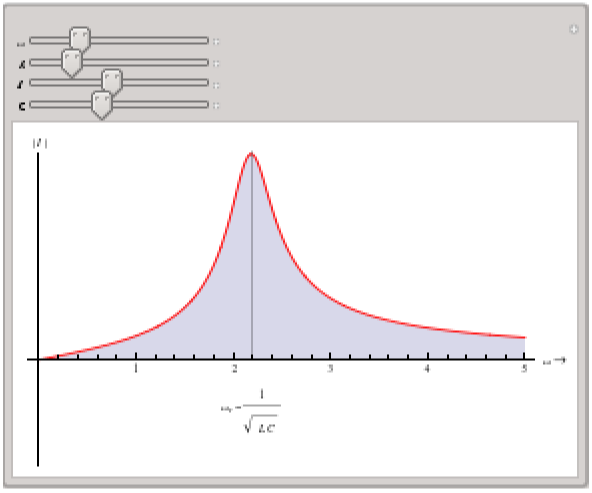
e então

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{I}_{ef} V_{ef}$$

## Ressonância num circuito RLC

$$Z = R + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

$$|\mathrm{I}(t)|_{max} = \frac{1}{|Z|} |V(t)|_{max} = \frac{|V_o|}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad \Longrightarrow \quad \omega_r = \frac{1}{\sqrt{L C}}$$



## *Circuito $R-L$ em série com f.e.m. sinusoidal $\mathcal{E} = V_o + V_1 \sin(\omega t)$*

- Neste caso a equação do circuito é, usando a notação complexa

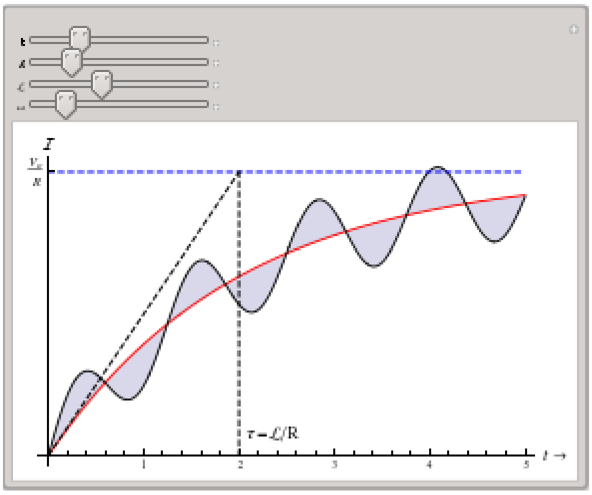
$$L \frac{d\mathrm{I}_c(t)}{dt} + R\,\mathrm{I}_c(t) = V_o + V_1 e^{i\omega t}$$

A solução compatível com a condição inicial $I_0 = 0$ é

$$\mathrm{I}_c(t) = \frac{V_o}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) + \frac{V_1}{R + i L\omega}\left(e^{i t\omega} - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

A parte real desta expressão é

$$\mathrm{I}(t) = \frac{V_o}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) + \frac{V_1}{R^2 + L^2\omega^2}\left(\cos\left(t\omega - \tan^{-1}\left(\frac{L\omega}{R}\right)\right) - R\,e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$



# Filtros R-C

$$V_e = Z\,\mathrm{I} \;=\; \left(R - \frac{i}{\omega C}\right)\mathrm{I} \qquad ; \qquad V_e - V_s = R\,\mathrm{I}$$

$$\left|\frac{V_s}{V_e}\right| = \left|\frac{-\frac{i}{\omega C}}{R - \frac{i}{\omega C}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (R\,C\,\omega)^2}}$$

- Tensão de saída no condensador: Filtro passa-baixos.