Electromagnetismo
e
Óptica

Segunda, 2 Dezembro, 2013

MEC LEGM

Equações de Maxwell

Equações Maxwell	Meios Lineares	Relações Gerais
$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{D}} = \rho_C$	$\vec{\boldsymbol{D}} = \epsilon \vec{\boldsymbol{E}}$	$\vec{\boldsymbol{D}} = \epsilon_O \vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{P}}$
$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0$	$\vec{\boldsymbol{H}} = \frac{\vec{\boldsymbol{B}}}{\mu}$	$\vec{\boldsymbol{H}} = \vec{\boldsymbol{B}} / \mu_O - \vec{\boldsymbol{M}}$
$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} = -\partial \vec{\boldsymbol{B}} / \partial t$	$\vec{\boldsymbol{J}}_C = \sigma_C \vec{\boldsymbol{E}}$	$\vec{\boldsymbol{J}}_C = \vec{\boldsymbol{J}}_C(\vec{\boldsymbol{E}})$
$\nabla \times \vec{\boldsymbol{H}} = \vec{\boldsymbol{J}}_C + \partial \vec{\boldsymbol{D}} / \partial t$	$\vec{\boldsymbol{P}} = \varepsilon_O \chi_e \vec{\boldsymbol{E}}$	$\vec{\boldsymbol{P}} = \vec{\boldsymbol{P}}(\vec{\boldsymbol{E}})$
$\vec{\boldsymbol{F}} = q \vec{\boldsymbol{E}} + q \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$	$\vec{\boldsymbol{M}} = \chi_m \vec{\boldsymbol{H}}$	$\vec{\boldsymbol{M}} = \vec{\boldsymbol{M}}(\vec{\boldsymbol{H}})$

Energia no campo electromagnético

- Densidade de energia no campo

$$w_{em} = \frac{1}{2} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{D}} + \frac{1}{2} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{H}} = \frac{1}{2} \left(\varepsilon E^2 + \mu H^2 \right)$$

- Potência transmitida por unidade de volume

$$-\frac{\partial w_{em}}{\partial t} = -\left(\varepsilon E \frac{\partial E}{\partial t} + \mu H \frac{\partial H}{\partial t} \right) =$$

$$= -\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\boldsymbol{D}}}{\partial t} - \vec{\boldsymbol{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t} =$$

$$= -\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \left(\nabla \times \vec{\boldsymbol{H}} - \vec{\boldsymbol{J}}_c \right) + \vec{\boldsymbol{H}} \cdot \left(\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} \right) =$$

$$= \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{J}}_c + \nabla \cdot \left(\vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{H}} \right)$$

Assim o fluxo de $\vec{\boldsymbol{S}} = \vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{H}}$ através de uma superfície fechada contabiliza a variação de energia electromagnética no volume que delimita.
O termo $\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{J}}_c$ representa a dissipação Ohmica de correntes de condução existentes no volume. Na ausência destas

$$-\frac{d \mathcal{W}_{em}}{d t} = -\iiint_{\mathfrak{v}} \frac{\partial w_{em}}{\partial t} d\mathfrak{v} = \iiint_{\mathfrak{v}} \nabla \cdot \left(\vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{H}} \right) d\mathfrak{v} = \oiint_{\partial V} \left(\vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{H}} \right) \cdot d\vec{\boldsymbol{S}}$$

Equação de Ondas Electromagnéticas

- Aplicando o rotacional à Lei de Faraday e de Ampére

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} \right) = \nabla \left(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \right) - \nabla^2 \vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}} \right)$$

$$\nabla^2\vec{E} = \nabla(\nabla\cdot\vec{E}) + \mu\frac{\partial\vec{J}}{\partial t} + \mu\frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{B}) = -\nabla^2\vec{B} = \mu\nabla\times\vec{J} + \mu\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{D})$$

- Usando a Lei de Ohm $\vec{J} = \sigma_c\vec{E}$ e de Gauss $\nabla\cdot\vec{D} = \rho_c$

$$\boxed{\nabla^2\vec{E} = \nabla\left(\frac{\rho_c}{\epsilon}\right) + \mu\sigma_c\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}}$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{B} = \mu\sigma_c\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}}$$

Equação de ondas na ausência de cargas ($\rho_c = 0$) e num meio não-condutor $\sigma_c = 0$

$$\nabla^2\vec{E} = \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \quad ; \quad \nabla^2\vec{B} = \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

- Para cada componente de $\vec{E}$ ou $\vec{B}$, pondo $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

Solução Geral para ondas electromagnéticas

- A equação de onda

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

tem solução geral

$$\psi(\vec{r}, t) = f(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) + g(\vec{k}\cdot\vec{r} + \omega t),$$

com f e g funções arbitrárias, desde que se verifique a relação de dispersão:

$$|\vec{k}|^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$$

- Demonstração

$$\nabla(\vec{k}\cdot\vec{r} \pm \omega t) = \vec{k}$$

Fazendo $s_\pm = \vec{k}\cdot\vec{r} \pm \omega t$ obtemos de $\nabla s_\pm = \vec{k}$:

$$\nabla^2\psi = |\vec{k}|^2 (f''(s_-) + g''(s_+))$$

$$\nabla\psi = \frac{df}{ds_-}\nabla s_- + \frac{dg}{ds_+}\nabla s_+ = (f'(s_-) + g'(s_+))\vec{k}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \psi) = \vec{k} \cdot \nabla (f(s_-) + g(s_+)) = \vec{k} \cdot \left(\frac{df}{ds_-} \nabla s_- + \frac{dg}{ds_+} \nabla s_+ \right)$$

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{v^2} (f''(s_-) + g''(s_+))$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{df}{ds_-} \frac{\partial s_-}{\partial t} + \frac{dg}{ds_+} \frac{\partial s_+}{\partial t} = \omega (-f'(s_-) + g'(s_+))$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \omega \left(- \frac{df'}{ds_-} \frac{\partial s_-}{\partial t} + \frac{dg'}{ds_+} \frac{\partial s_+}{\partial t} \right)$$

Velocidade de Fase e Velocidade de Grupo

- Fase de onda:

$$\phi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = \vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{v} t)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{v} = \omega \qquad \Longrightarrow \qquad v = \frac{\omega}{k}$$

- Velocidade de fase :

$$\vec{v} = \frac{\omega}{k^2} \vec{k}$$

  - ϕ=constante

$$\frac{d\phi}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{k} \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{v} \right) = 0 \quad \therefore \quad \vec{v} = \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{\phi = const.}$$

- Velocidade de grupo:

$$\vec{v}_g = \nabla_{\vec{k}} \omega (\vec{k})$$

Problema

- O perfil de uma onda harmónica progressiva que se desloca a uma velocidade de 1.2 m/s é, num dado instante da forma $y = (0.02\, m) \sin(157\, m^{-1} x)$. Qual é a sua amplitude, comprimento de onda, frequência, e período?
  - Solução

    Para uma onda harmónica $y = A \operatorname{Sin}[k x - \omega t]$, a velocidade de propagação corresponde à velocidade de fase

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$$

    Como indicado a velocidade de fase é $v = 1.2\, m/s$, e o número de ondas $k = 157\, m^{-1}$, pelo que o comprimento de onda é

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 4 \times 10^{-2}\, m$$

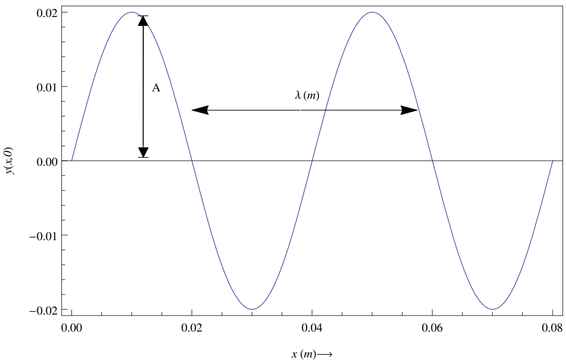
    Da **relação de dispersão** $\omega = k v$ obtém-se a velocidade angular

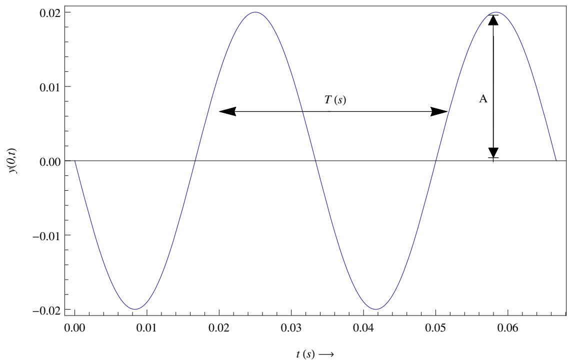
$$\omega = 157 \times 1.2 = 188.4 \quad \frac{rad}{s}$$

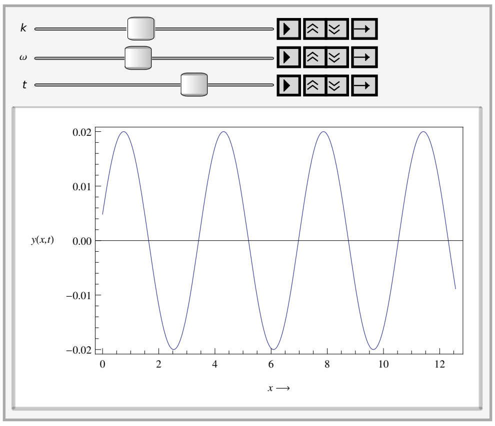
e a partir desta o período

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 3.33 \times 10^{-2}\, s.$$

$$\begin{cases} \textit{Número de ondas}: & k = \dfrac{2\pi}{\lambda} & rad\,/\,m \\ \textit{Comprimento de onda}: & \lambda = v\,T & m \\ \textit{Período}: & T = \dfrac{\lambda}{v} & s \\ \textit{Frequência}: & f = \dfrac{1}{T} & Hertz \\ \textit{Velocidade angular}: & \omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f & rad\,/\,s \\ \textit{Velocidade de fase} & v = \dfrac{\omega}{k} & m\,/\,s \end{cases}$$







Solução Ondas Planas

Procurando soluções da forma

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \vec{\boldsymbol{E}}_o\, e^{i\left(\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}} - \omega t\right)}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \vec{\boldsymbol{B}}_o\, e^{i\left(\vec{\boldsymbol{k}}_1\cdot\vec{\boldsymbol{r}} - \omega_1 t\right)}$$

- Introduzindo nas equações de Maxwell obtêm-se os constrangimentos

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{\boldsymbol{k}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{\boldsymbol{k}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0$$

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} = i\, \vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t} = i\, \omega_1\, \vec{\boldsymbol{B}}$$

$$\vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{E}} = \omega_1\, \vec{\boldsymbol{B}} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{\boldsymbol{k}} \perp \vec{\boldsymbol{E}} \perp \vec{\boldsymbol{B}}$$

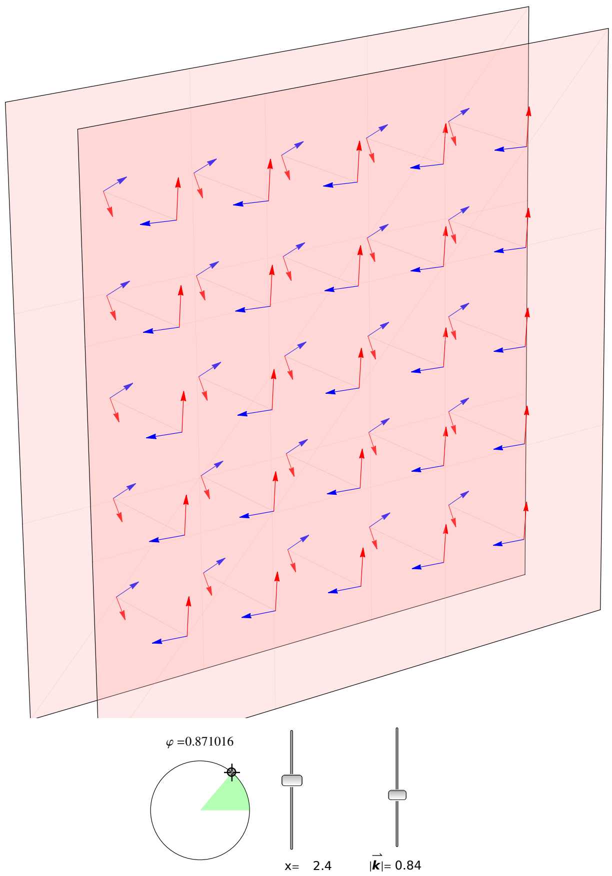
$$\vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{E}} = \omega_1\, \vec{\boldsymbol{B}} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{E}}_o = \omega_1\, \vec{\boldsymbol{B}}_o\, e^{i\left(\left(\vec{\boldsymbol{k}}_1 - \vec{\boldsymbol{k}}\right)\cdot \vec{\boldsymbol{r}} - (\omega_1 - \omega)\, t\right)}$$

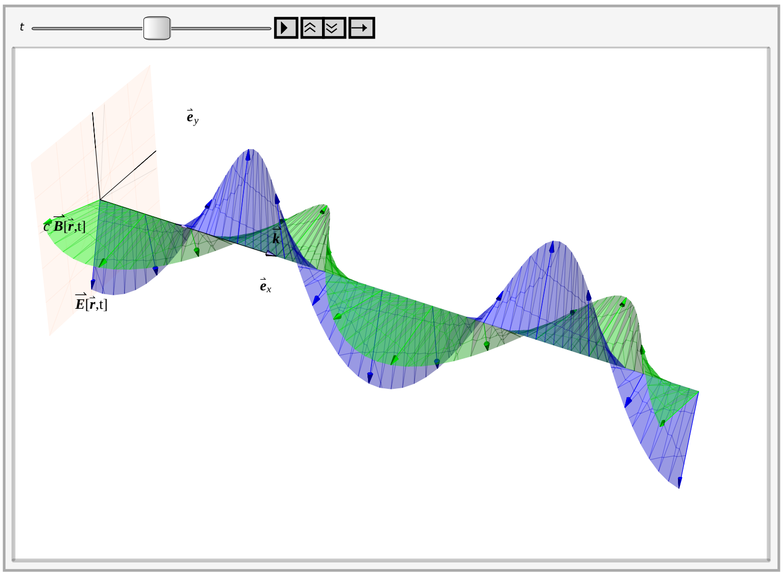
Para permanecer válida para todo o $\vec{\boldsymbol{r}}$ e todo o instante t, o expoente tem que ser nulo:

$$\vec{\boldsymbol{k}}_1 = \vec{\boldsymbol{k}}; \qquad \omega_1 = \omega;$$

- Relação de Dispersão

$$\left|\vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{E}}\right| = \omega\, |\vec{\boldsymbol{B}}| \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{|\vec{\boldsymbol{B}}|}{|\vec{\boldsymbol{E}}|} = \frac{|\vec{\boldsymbol{k}}|}{\omega} = \frac{1}{c} \equiv \sqrt{\mu\, \varepsilon}$$




t
$\vec{e}_y$
$c\,\vec{B}[\vec{r},t]$
$\vec{k}$
$\vec{e}_x$
$\vec{E}[\vec{r},t]$