# Electromagnetismo
# e
# Óptica

Segunda, 16 Dezembro, 2013

MEC LEGM

## Inversão de fase

- Uma onda electromagnética sofre uma inversão de fase quando reflectida numa superfície com um índice de refracção maior que o do meio da onda incidente.

  Quando a onda incidente se reflecte num meio com maior índice de refracção que o meio da onda transmitida não há inversão de fase.

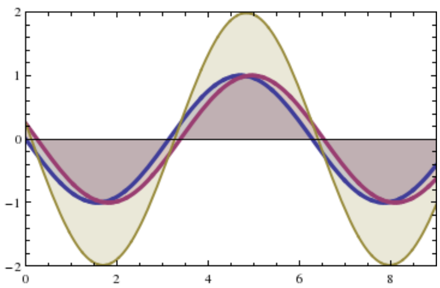
# Óptica Ondulatória: Interferência e difracção.

- Estudo da interferência em experiências com duas fendas: condições para interferência construtiva e destructiva.
- Cálculo da intensidade das franjas de interferência.
- Generalização das interferências para um sistema multi-fenda: estudo da rede de difracção.

## Sobreposição de ondas

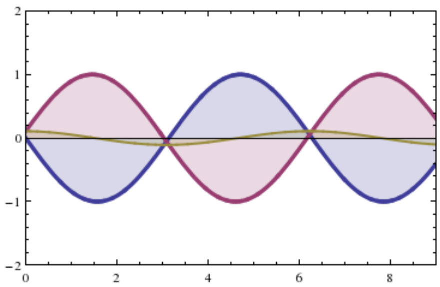
- Ondas quase em fase $\Delta\phi \approx 2\,m\,\pi$

  As ondas azul e vermelho interferem construtivamente dando origem a uma onda com o mesmo $\lambda$ e a soma das amplitudes.




- Ondas quase em oposição de fase $\Delta\phi \approx (2\,m+1)\,\pi$

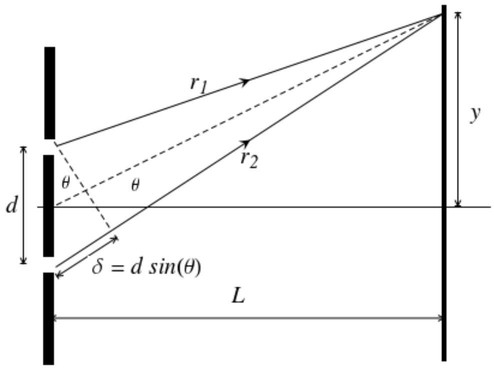
  As ondas azul e vermelho interferem destrutivamente dando origem a uma onda com o mesmo $\lambda$ e a diferença das amplitudes.



## Interferência de duas ondas: Experiência de Young

- Quando a distância entre as fontes é pequena comparada à distância ao écrã $\left(\frac{d}{L} \ll 1\right)$ a diferença entre as distâncias $r_1$ e $r_2$ é aproximada por

$$\delta = r_2 - r_1 \simeq d\, sin(\theta)$$




Se as ondas estão em fase à saída das fendas, a segunda fica desfasada de

$$k\,\delta = 2\,\pi\,\frac{\delta}{\lambda}$$

em relação à primeira ao percorrer a distância $\delta$. A partir daí a diferença de fase mantém-se constante até chegar ao ponto $P$ porque as distâncias percorridas $r_1$ e $r_2 - \delta$ são iguais. Assim se

$$\begin{cases} \delta = m\,\lambda & \Longrightarrow\ k\,\delta = 2\,\pi\,m \\ \delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda & \Longrightarrow\ k\,\delta = 2\,\pi\,m + \pi \end{cases} \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

as ondas chegam a $P$ em **fase** ou em **oposição de fase**

$$\begin{cases} sin(\omega\,t - k\ r_1) \ = \ sin(\omega\,t\ - k\ (r_2 - \delta)) \ = \ + sin(\omega\,t\ - k\ r_2) \\ sin(\omega\,t - k\ r_1) \ = \ sin(\omega\,t\ - k\,(r_2 - \delta)) \ = \ - sin(\omega\,t\ - k\,r_2) \end{cases}$$

- A interferência construtiva de ondas em fase dá origem a máximos de intensidade determinados pelas direcções angulares $\theta_m$ definidas por

$$k\,\delta \equiv \frac{2\,\pi}{\lambda}\,d\,sin(\theta_m) = 2\,\pi\,m \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

ou seja

$$sin(\theta_m) = \frac{m}{d}\,\lambda \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

### *Posição de máximos e mínimo no alvo*

Como $y = L\tan(\theta)$ podemos obter, quando $y \ll L$

$$sin(\theta) = \frac{y}{L}\,\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{L}\right)^2}} \approx \frac{y}{L}$$

As posições das riscas claras e escuras no écrã são

$$\begin{cases} y_+ = m \dfrac{L}{d} \lambda & (maximo) \\ y_- = \left(m + \dfrac{1}{2}\right) \dfrac{L}{d} \lambda & (minimo) \end{cases}$$

para $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

## Intensidade das riscas de interferência

- A sobreposição em $P$ das ondas desfasadas de $k\,\delta = 2\,\pi\,\frac{\delta}{\lambda}$ significa que o campo eléctrico aí terá uma magnitude

$$\left|\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}_P, t)\right| = E_o\,(sin(\omega\,t - k\,r_1) + sin(\omega\,t - k\,(r_1 + \delta)))$$

Tendo em conta que

$$sin(\alpha) + sin(\beta) = 2\,sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

obtemos

$$\left|\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}_P, t)\right| = 2\,E_o\,cos\left(\frac{k\,\delta}{2}\right) sin\left(\omega\,t - k\,r_1 - \frac{k\,\delta}{2}\right)$$

A intensidade de uma onda electromagnética é proporcional ao quadrado da magnitude do seu campo eléctrico, ou seja

$$I_P = \frac{1}{Z_o}\left\langle \left|\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}_P, t)\right|^2 \right\rangle = \frac{1}{Z_o}\,4\,E_o^2\,cos\left(\frac{k\,\delta}{2}\right)^2 \left\langle sin\left(\omega\,t - k\,r_1 - \frac{k\,\delta}{2}\right)^2 \right\rangle$$

A média temporal do quadrado do seno dá um factor de $\frac{1}{2}$ e a amplitude máxima do campo eléctrico deve ser $2\,E_o$ pelo que

$$I_P = I_{max}\,cos\left(\frac{k\,\delta}{2}\right)^2 = I_{max}\,cos\left(\frac{\pi\,d}{\lambda}\,sin(\theta)\right)^2 \approx I_{max}\,cos\left(\frac{\pi\,d}{\lambda\,L}\,y\right)^2$$

# Difracção

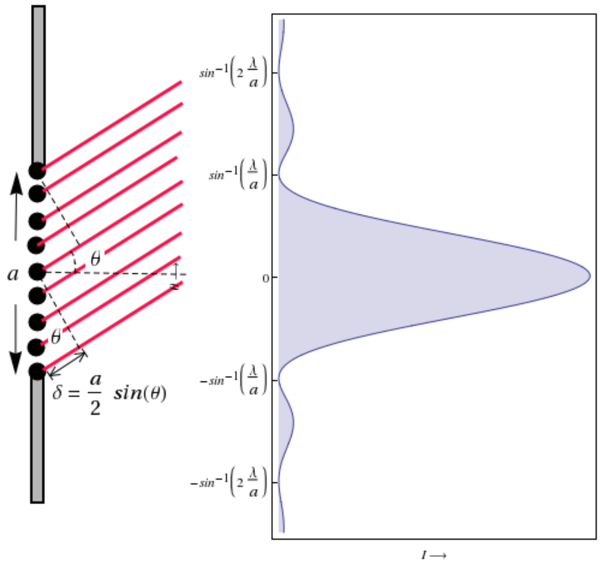
## Princípio de Huygens (1660)

- Todos os pontos de uma onda podem ser tomados como fontes pontuais que emitem ondas secundárias, que se propagam esféricamente através de um meio à velocidade característica desse meio. Após um intervalo de tempo a posição da frente de onda é a superfície tangente a essas ondas secundárias.

  No caso da difracção, quando a largura da fenda por onde passa uma onda é da ordem de grandeza do comprimento de onda $a \geq \lambda$, então a onda que resulta pode ser considerada como a sobreposição de um número teóricamente infinito de ondas geradas por cada ponto dentro da fenda que se encontra à mesma fase.

## Difracção de Frauenhoffer

- Quando o alvo se encontra longe da fenda, os raios que chegam a cada região do alvo são aproximadamente paralelos, e o padrão de intensidade luminosa que se obtém designa-se de Frauenhoffer.
- Vamos assumir que todos os pontos da fenda da figura seguinte estão em fase, ou seja a onda incidente na abertura é plana e o vector de onda é perpendicular ao plano da fenda. No caso de uma onda plana incidindo noutra direcção o raciocínio a efectuar e o padrão obtido são semelhantes, mas centrados na direcção do vector de onda.




Nesta figura cada ponto da fenda age como uma fonte de acordo com o princípio de Huygens. Se a distância $\delta = \frac{a}{2}\sin(\theta)$ corresponde a $\delta = \pm\frac{\lambda}{2}$ então o desfasamento entre as respectivas ondas é de

$$k\,\delta = \pm\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{2} = \pm\pi$$

ou seja existe cancelamento das ondas a partir daí e também no écrã.
É possível obter condições semelhantes levando às expressões de cancelamento total para fontes cujos trajectos difiram de

$$\delta_m = \frac{a}{2\,m}\sin(\theta) = \pm\frac{\lambda}{2} \quad \Longrightarrow \quad k\ \delta_m = \pm\,\pi$$

ou seja, obtemos mínimos para ângulos $\theta$ que verifiquem

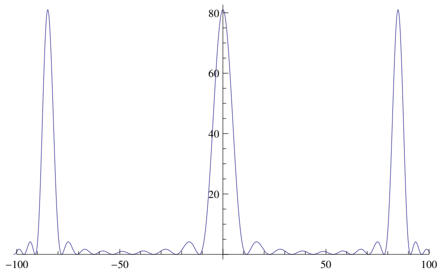
$$\sin(\theta) = \frac{m}{a}\lambda \qquad (m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ \ldots)$$

- Note-se a semelhança com a equação para as direcções dos máximos de interferência de duas fendas, mas aqui falamos de mínimos e *a* é a abertura da fenda e não a seperação das fendas.

Na figura vê-se à direita a distribuição angular da intensidade, que tem a forma

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}_{max}\left(\frac{sin\left(\frac{k\,\delta}{2}\right)}{\frac{k\,\delta}{2}}\right)^2 = \mathrm{I}_{max}\left(\frac{sin\left(\frac{\pi\,a\,sin(\theta)}{\lambda}\right)}{\frac{\pi\,a\,sin(\theta)}{\lambda}}\right)^2$$

# Redes de difracção




- Numa rede de difração com *N* fendas de separação *d* continua a ter-se a relação

$$d\,sin(\theta_m) = m\,\lambda \quad (m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$$

como condição para os máximos de interferência de fendas adjacentes. Para um alvo longe comparado com a dimensão da rede de difracção, os máximos correspondem à situação em que todas as fendas adjacentes interferem construtivamente na mesma direcção $\theta_m$,

$$sin(\theta_m) = \frac{m}{d}\,\lambda$$

Para $N = 2$ fendas, a condição de mínimo era que a diferença de trajectos desse origem a uma diferença de fase de $\Delta\phi = \pi$. Para *N* fendas a diferença de fase entre trajectos com interferência destrutiva será

$$\Delta\phi = \frac{\pi}{\frac{N}{2}} = \frac{2\,\pi}{N}$$

Para ver que assim é considere-se que  para uma dada direcção $\theta_m$ há uma diferença de fase de $\pi$ entre a primeira fenda e a fenda $\frac{N}{2}$. Então os trajectos na mesma  direcção a partir da segunda e $\frac{N}{2} + 1$ fendas também estão desfasados de $\pi$, a assim sucessivamente num total de $\frac{N}{2}$ cancelamentos. Esta é a menor diferença de fase entre fendas que dá cancelamento total.

O aumento de fase para cada par de fendas adjacentes será correspondente a um aumento de trajecto $\delta$ tal que

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$$

ou seja, para um mínimo $\Delta\phi = \frac{2\pi}{N}$ e

$$\delta = \frac{\lambda}{N}$$

Tendo isto em conta,a largura dos máximos na direcção $\theta_m$ pode ser calculada expandindo o comprimento do trajecto para o mínimo respectivo

$$d\,sin(\theta_m + \Delta\theta_m) = m\lambda + \delta \implies d\,sin(\theta_m) + d\,cos(\theta_m)\,\Delta\theta_m + \ldots = m\lambda + \frac{\lambda}{N}$$

$$d\,sin(\theta_m) = m\lambda \qquad \implies \qquad \Delta\theta_m = \frac{\lambda}{N\,d\,cos(\theta_m)}$$

## *Quando $\lambda$ é variável, como é que se alteram as posições dos máximos?*

- A partir da condição para os máximos $\sin(\theta_m) = \frac{m}{d}\lambda$ obtemos

$$\frac{d\,sin(\theta_m)}{d\lambda} = \frac{d\,sin(\theta_m)}{d\theta_m}\frac{d\theta_m}{d\lambda} = \frac{m}{d} \qquad \implies \qquad d\theta_m = \frac{m}{d\,cos(\theta_m)}d\lambda$$

- Para conseguirmos separar duas riscas correspondentes ao mesmo máximo de ordem *m* é necessário que o ângulo $d\theta_m$ seja da ordem de grandeza da largura das riscas, ou seja, o factor de resolução *R* é

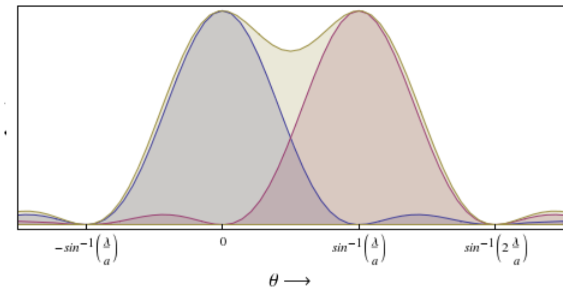
$$\frac{d\theta_m}{\Delta\theta_m} = N\,m\,\frac{d\lambda}{\lambda} \approx 1 \qquad \implies \qquad R = \frac{\lambda}{d\lambda} = N\,m$$

## Critério de Rayleigh

- Para poder separar duas fontes pontuais vistas através de uma fenda de largura *a*, os máximos das ondas difractadas não se podem sobrepor demais. O mínimo exigido (Critério de Rayleigh) é que o máximo de uma coincida com o primeiro mínimo da outra, ou seja a separação entre os máximos de ordem 1 deve ser em termos angulares

$$\Delta\theta_m = sin^{-1}\left(\frac{\lambda}{a}\right)$$

É esse o caso da figura seguinte




- Quando $\Delta\theta_{\min} < \sin^{-1}\left(\frac{\lambda}{a}\right)$ as ondas difractadas somam-se de forma a não evidenciar a existência de dois máximos.