Electromagnetismo
e
Óptica

Quarta, 18 Dezembro, 2013

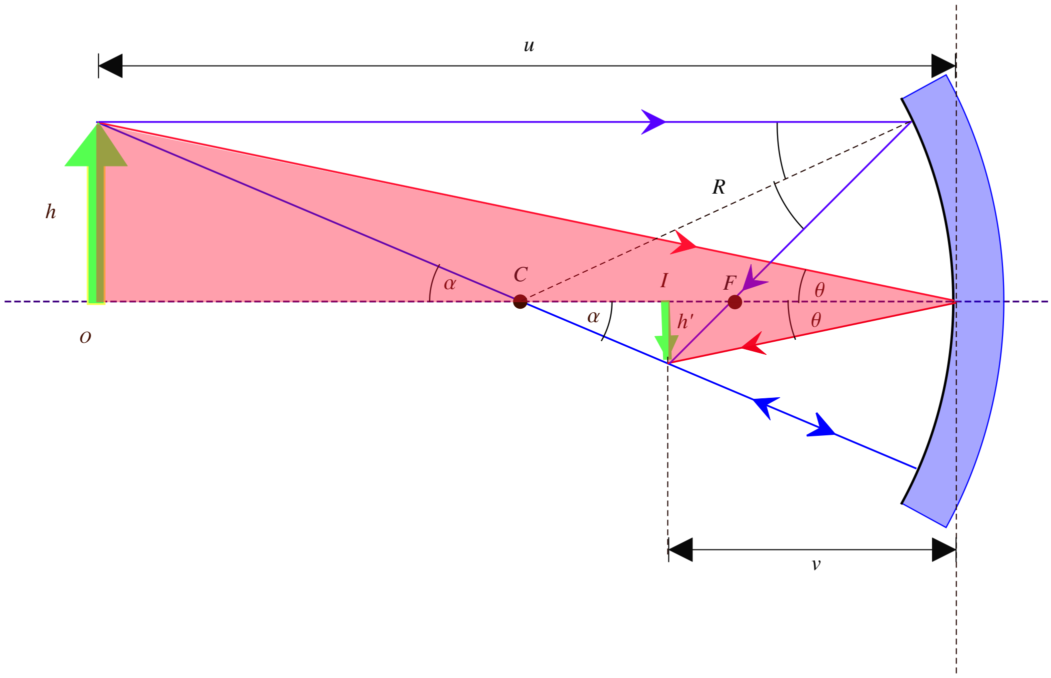
MEC LEGM

Espelhos

- Estudo das imagens formadas por espelhos planos. Imagem real e imagem virtual. Ampliação (M) da imagem.
- Imagens formadas por espelhos esféricos: côncavos e convexos. Centro de curvatura, distância focal e equação dos espelhos.
- Diagramas de raios: aplicação a um espelho côncavo.

Espelhos esféricos

- Num espelho esférico, o raio de curvatura é positivo se fôr concavo ($R > 0$), negativo se convexo ($R < 0$).
- Para objectos perto do espelho à distância $u < \infty$, a imagem real formada pela intersecção de raios luminosos reflectidos do espelho forma-se a uma distância $v > 0$ do espelho e de acordo com a imagem seguinte fica invertida.



- Nesta imagem, o ângulo θ de incidência dum raio luminoso no ponto de intersecção do eixo com o espelho verifica a identidade:

$$tan(\theta) = \frac{h}{u} = -\frac{h'}{v}$$

onde $h' < 0$ representa a altura da imagem real formada à distância v do espelho.

- Para o ângulo α do raio luminoso que passa pelo centro do espelho, e portanto é normal à sua superfície (coincide com o raio reflectido) obtém-se de forma análoga a identidade:

$$tan(\alpha) = \frac{h}{u-R} = -\frac{h'}{R-v} \quad \Longrightarrow \quad \frac{h'}{h} = -\frac{R-v}{u-R} = -\frac{v}{u}$$

Esta última equação pode ser resolvida para se obter

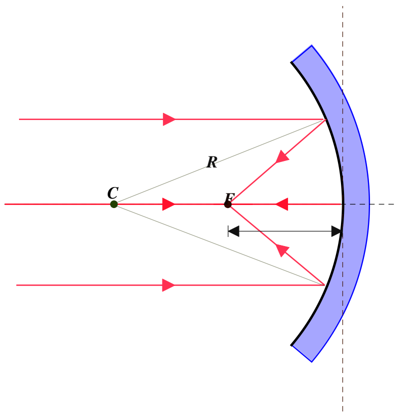
$$R = \frac{2\,u\,v}{u+v}$$

Dividindo por 2 e invertendo obtém-se daqui a **Equação dos Espelhos**

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{2}{R}$$

Para imagens muito distantes $v = \frac{R}{2}$ tem-se $v = \frac{R}{2}$, ficando assim definido o **foco** e a **distância focal**

$$f = \frac{R}{2}$$



Equação dos Espelhos

- Em termos da distância focal $f = \frac{R}{2}$ a equação dos espelhos fica

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$$

Magnificação

A **magnificação** dum espelho determina o tamanho h' da imagem observada em função do tamanho real h do objecto

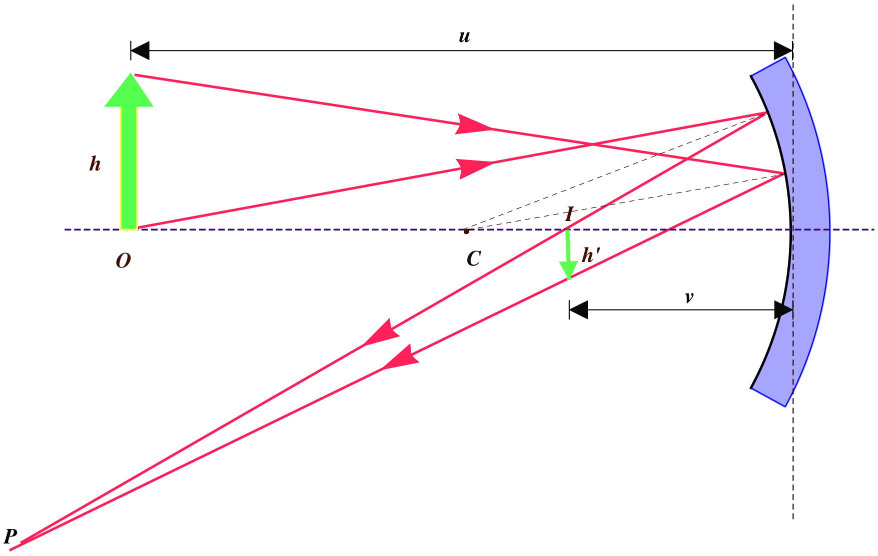
$$M = \frac{h'}{h} = -\frac{v}{u}$$

Quando a magnificação é

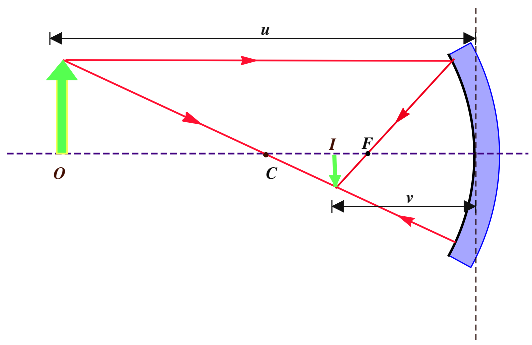
$$\begin{cases} \text{Positiva} & \Rightarrow \text{ imagem direita} \\ \text{Negativa} & \Rightarrow \text{ imagem invertida} \\ \text{Maior que 1} & \Rightarrow \text{ imagem aumentada} \\ \text{Menor que 1} & \Rightarrow \text{ imagem reduzida} \\ \text{Igual a 1} & \Rightarrow \text{ Imagem do mesmo tamanho} \end{cases}$$

Formação de imagem: Imagens Reais e Virtuais

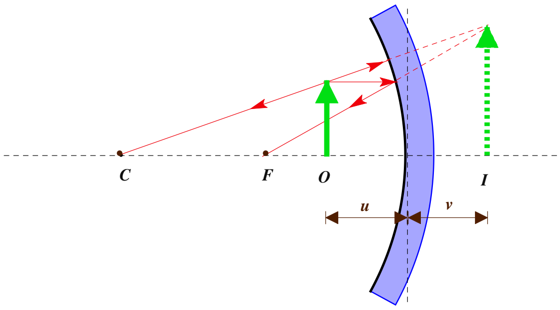
- Visto de *P* o objecto em *O* de altura *h* parece invertido com altura *h′* e localizado em I. A imagem em I é real, ou seja é o resultado de raios luminosos convergentes e por isso é projectável num alvo.



- **Imagens reais** são formadas pela intersecção de raios luminosos reflectidos no espelho e correspondem sempre a valores de $v > 0$. Estas imagens formam-se à frente do espelho e aparecem invertidas.

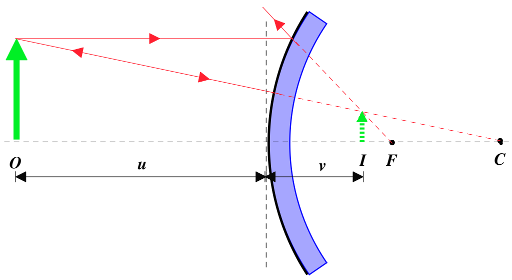


- **Imagens virtuais** são imagens com $v < 0$ (i.e. formam-se atrás do espelho) e que não ficam invertidas. São formadas pelas intersecções de prolongamentos de raios luminosos reflectidos no espelho.



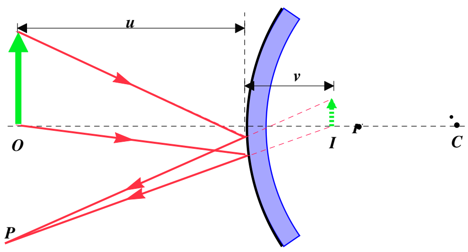
Espelho convexo

- No caso de um espelho convexo, o raio de curvatura R e a distância focal f são ambos negativos. As imagens formadas são sempre imagens virtuais ($v < 0$).



Problema: Espelho convexo

- Se um espelho convexo, com distância focal $f = -0.25\,m$, mostra a imagem de um objecto localizado a $3\,m$ de distância, qual deve ser a posição da imagem e a sua magnificação M?



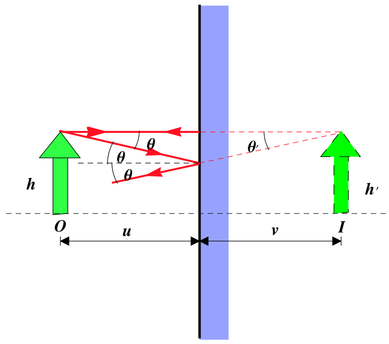
$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{f} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{3}+\frac{1}{v}=-\frac{1}{0.25}=-4$$

$$v=\frac{1}{-4-\frac{1}{3}}=-\frac{3}{13}=-0.23\,m$$

$$M=-\frac{v}{u}=-\frac{1}{13}=0.077$$

Espelhos planos

- No caso de espelhos planos as imagens de objectos à distância u da sua superfície forma-se pela intersecção de prolongamentos das reflecções de dois quaisquer raios originários do mesmo ponto do objecto.



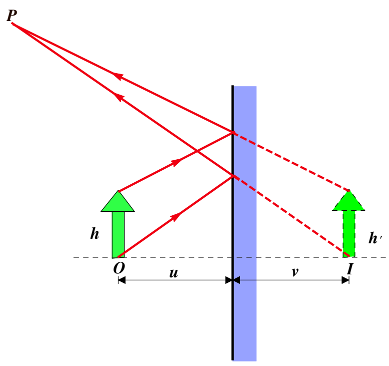
- Uma vez que os ângulos de incidência e reflecção são iguais e portanto dois raios reflectidos do mesmo ponto divergem, as imagens formadas são sempre virtuais $(v < 0)$ ou seja formam-se do lado de trás do espelho.
- Dado que os triângulos assim formados são isósceles, já que os ângulos $\theta = \theta'$, deve ter-se $u = -v$, ou seja

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 0$$

  Por outro lado, é evidente que $h = h'$, pelo que a magnificação de um espelho plano é

$$M = \frac{h'}{h} = 1$$

- Deve igualmente ser evidente que a imagem I é a fonte aparente do reflexo do objecto visto no espelho por qualquer observador em qualquer posição P.

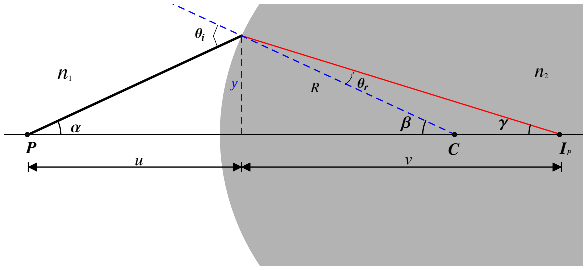


Imagens formadas por refracção.

A fórmula da lente esférica

- Consideremos uma superfície de transição entre dois meios com índices de refracção diferentes n_1 e n_2.

- Assumindo que esta superfície é convexa com raio de curvatura R, consideremos a relação entre a distância u de uma fonte de raio luminoso à superfície e a sua imagem no outro meio à distância v da superfície.
  - Assumimos aqui a aproximação de raio paraxiais, i.e. todos os ângulos de incidência são suficientemente pequenos para que a aproximação $\sin(\theta) \approx \theta$ seja válida.



- O ângulo exterior num vértice de um triângulo é igual à soma dos ângulos interiores adjacentes ao lado oposto a esse vértice.
- Assim, para ângulos pequenos e em conjunto com a lei de Snell, da imagem seguinte podemos determinar que:

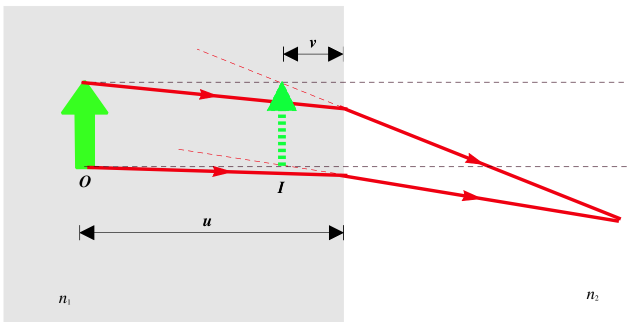
$$\begin{cases} \theta_i = \alpha + \beta \\ \beta = \theta_r + \gamma \\ n_1\ \theta_i = n_2\, \theta_r \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \alpha \simeq \dfrac{y}{u} \\ \beta \simeq \dfrac{y}{R} \\ \gamma == \dfrac{y}{v} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{n_1}{u} + \frac{n_2}{v} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

Interfaces planas

- Quando $R = \infty$ a superfície entre os dois meios refringentes é plana e deve ter-se igualmente

$$\frac{n_1}{u} = -\frac{n_2}{v} \qquad \Longrightarrow \qquad v = -\frac{n_2}{n_1} u$$

- Se tivermos $n_2 < n_1$ então $|v| < u$, i.e. a profundidade aparente da imagem virtual é menor que a profundidade real.



Estudo das lentes finas

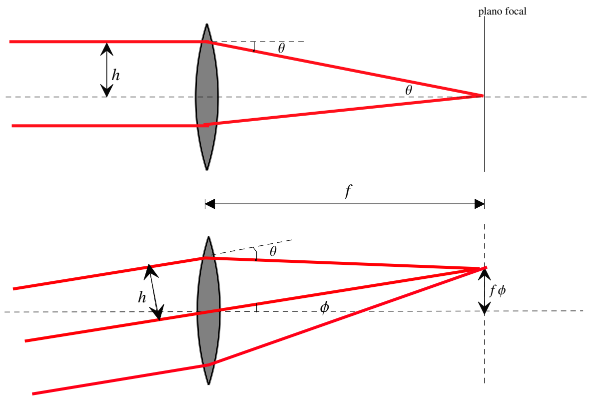
Distância focal

Para pequenos ângulos ($\theta < 15°$)

$$tan(\theta) = \frac{h}{f} \implies \theta \approx \frac{h}{f}$$

Para raios de luz incidentes com inclinação ϕ a imagem forma-se à distância

$$h_i = f\, tan(\phi) \approx f\, \phi$$



Equação das lentes finas

- Numa lente formada por duas faces esféricas de raios R_1 e R_2 a fórmula $\frac{n_1}{u} + \frac{n_2}{v} = \frac{n_2 - n_1}{R}$ pode ser sucessivamente aplicada primeiro na transição do ar $(n_1 = 1)$ para a lente $(n_2 = n > 1)$, e depois na transição da lente $(n_1 = n > 1)$ para o ar $(n_2 = 1)$. Designando por u' a distância da imagem v à face de saída (i.e. a primeira imagem é agora o objecto) e v' a respectiva imagem de saída, obemos

$$\begin{cases} \frac{1}{u} + \frac{n}{v} = \frac{n-1}{R_1} & ar \to lente \\ \frac{n}{u'} + \frac{1}{v'} = \frac{1-n}{R_2} & lente \to ar \end{cases}$$

Se a lente é fina de espessura ℓ podemos assumir que $u' \approx \ell - v$ (porque a primeira imagem é virtual, $v < 0$), e se $\ell \ll -v$, $u' \approx -v$ e obtemos, somando as equações,

$$\begin{cases} \frac{1}{u} + \frac{n}{v} = \frac{n-1}{R_1} & ar \to lente \\ -\frac{n}{v} + \frac{1}{v'} = \frac{1-n}{R_2} & lente \to ar \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{u} + \frac{1}{v'} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Podemos agora abandonar a notação v' e escrever para o objecto à distância u e a sua imagem final à distância v da lente

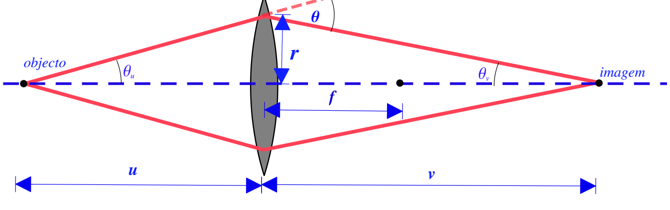
$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{f}$$

onde $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$ é a **potência da lente** em diopterias e f respectiva **distância focal**.

- Para objectos muito perto da lente, a uma distância u, o ângulo de refracção θ de um raio incidindo à distância r do eixo continua a ser dado pela fórmula

$$\theta \approx \frac{r}{f}$$

mas a imagem já não se forma no plano focal, mas sim a uma distância v da lente. A relação entre os diversos ângulos é



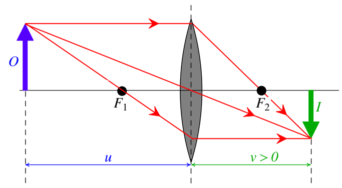
$$\theta_u + \theta_v + \pi - \theta = \pi \qquad \Longrightarrow \quad \theta = \theta_u + \theta_v$$

A partir daqui podemos retirar a relação entre as distâncias do objecto e da sua imagem

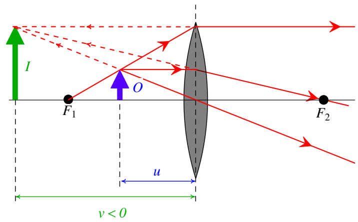
$$\begin{cases} tan(\theta_u) = \dfrac{r}{u} \approx \theta_u \\ tan(\theta_v) = \dfrac{r}{v} \approx \theta_v \end{cases} \implies \frac{r}{f} = \frac{r}{u} + \frac{r}{v} \quad \therefore \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$$

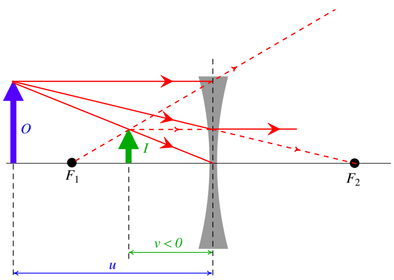
Formação de imagens

- Imagem real



- Imagem virtual

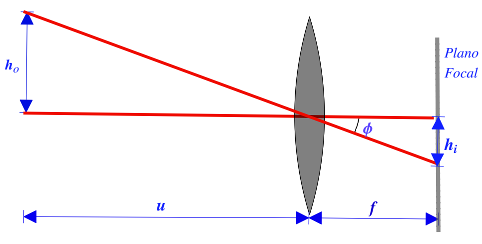




Magnificação lateral e Magnificação angular duma lente

- Para uma imagem distante, a razão entre o tamanho da imagem e o tamanho real é designado poder de magnificação da lente ou **magnificação lateral**.

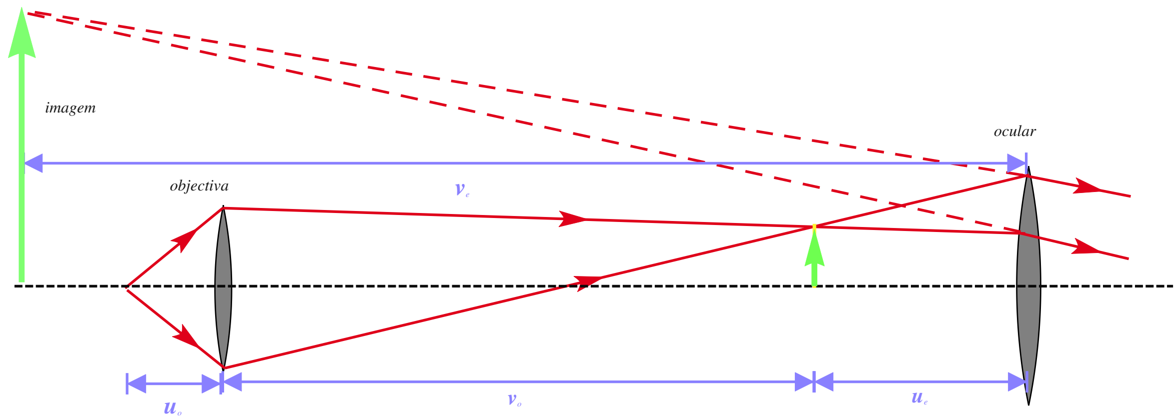
$$M = \frac{h_i}{h_o} = \frac{f\,tan(\phi)}{h_o} = \frac{f}{h_o}\frac{h_o}{u} = \frac{f}{u}$$



A **magnificação angular** de uma lente é dada pela razão entre o a amplitude angular de um objecto a 25 cm da lente e a amplitude angular do mesmo objecto colocado à distância focal da lente. A distância a que o olho consegue ver um objecto focado sem esforço e sem ajudas é maior ou igual a 25 cm.

$$M_\theta = \frac{0.25}{f}$$

Microscópio



- Para uma imagem virtual formada a $v_e = -25$ cm de uma lente ocular de potência $P_e = \frac{1}{f} = 16$ diopterias, esta deve ficar a uma distância da imagem formada pela objectiva calculada a partir de

$$\frac{1}{u_e} - \frac{1}{0.25} = \frac{1}{f_e} = 16 \qquad \Longrightarrow \quad u = 0.05\,m$$

- A magnificação desta ocular é de $M_e = M_\theta = \left|\frac{v_e}{u_e}\right| = 5$.
- Se a potência da lente da objectiva fôr $P_o = \frac{1}{f_o} = 50$ diopterias, e estiver colocada a 20 cm da ocular, o objecto a observar deve ser colocado à distância u_o da objectiva de forma que

$$\frac{1}{u_o} + \frac{1}{v_o} = \frac{1}{f_o} = \frac{1}{u_o} + \frac{1}{0.15} = 50 \qquad \Longrightarrow \qquad u_o = \; 0.023\,m$$

- Obtém-se assim uma magnificação $M_o = \frac{0.15}{0.023} = 6.5$. A magnificação total de ambas as lentes é

$$M = M_o \times M_e = 6.5 \times 5 = 32.5$$

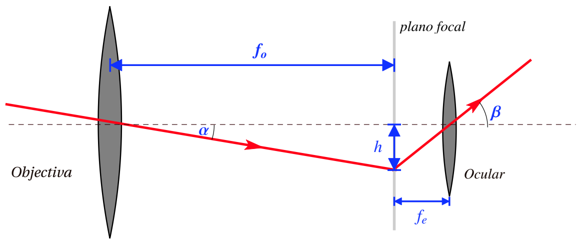
Telescópios

Magnificação angular dum telescópio

- O objectivo de um telescópio é de aumentar a separação angular entre objectos a longa distância. A magnificação angular num telescópio é definida como a razão entre o ângulo α de entrada e o ângulo β de saída de um raio luminoso.

$$M_\theta = \frac{\beta}{\alpha}$$

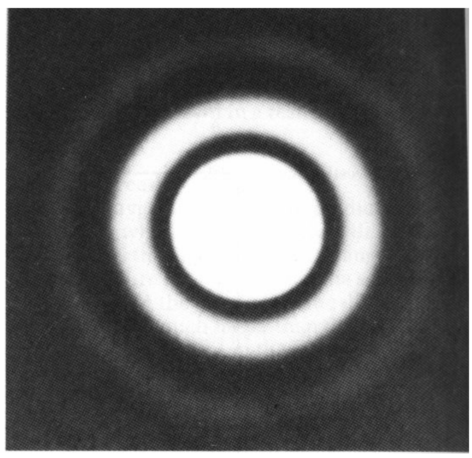
- Assim, raios de luz que entrem na lente objectiva com um desvio de α relativamente ao eixo devem idealmente sair da lente ocular com uma inclinação $\beta > \alpha$.
- Note-se que o objecto para a ocular é a imagem da objectiva, formada no plano focal.



- Com a lente ocular à distância focal f_e do plano focal da objectiva f_o a magnificação angular pode ser calculada

$$tan(\alpha) = \frac{h}{f_o} \quad ; \quad tan(\beta) = \frac{h}{f_e} \quad \Longrightarrow \quad M_\theta = \frac{\beta}{\alpha} \approx \frac{f_o}{f_e}$$

Abertura circular



- O cálculo do ângulo de difracção de uma abertura circular de diâmetro b indica que o primeiro mínimo ocorre para um ângulo

$$sin(\theta_1) \approx \frac{1.2\,\lambda}{b}$$

- Conjugando este efeito de difracção dum orifício de diâmetro b com a formação de uma imagem através de uma lente de distância focal f, podemos deduzir que a imagem de um ponto distante no plano focal da lente terá um diâmetro d dado por

$$d = f\,tan(2\,\theta_1) \approx f\,\frac{2.4\,\lambda}{b}$$

Problema: Olho humano

- Para um olho humano a distância focal é $f = 20$ mm, e o diâmetro da pupila é aproximadamente $b = 4$ mm.
- Para luz com um comprimento de onda $\lambda = 0.5\,\mu m$ determinar o diâmetro da imagem de um ponto distante formado na retina.

$$d = f\,\frac{2.4\,\lambda}{b} = 20\,mm \times \frac{2.4 \times 0.5\,\mu m}{4\,mm} = 6\,\mu m$$

Problema: Satélite espião

- Qual é a resolução espacial de um satélite espião que se encontra em órbita a 100 Km da superfície da Terra, sabendo que tem uma lente com um diâmetro de 1 m ?
  - (considere que o comprimento de onda detectado é da ordem de $\lambda = 0.45\,\mu m$)
- A separação da imagem de dois pontos obedece ao critério de Rayleigh, e deve assim subtender o ângulo θ_1.

$$\theta_1 = 1.2\,\frac{\lambda}{b} = 1.2 \times \frac{0.45\,\mu m}{1\,m} = 5.4 \times 10^{-7}\,rad$$

$$r = h\,\theta_1 = 100\,Km \times 5.4 \times 10^{-7} = 5.4\,cm$$