Electromagnetismo
e
Óptica

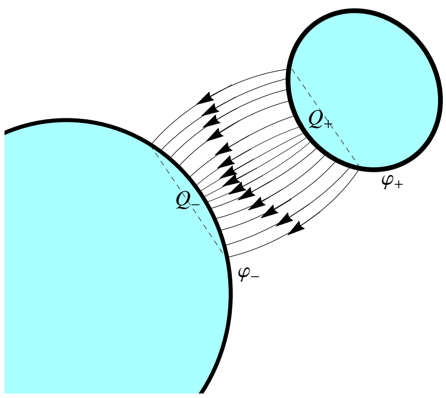
Segunda, 7 de Outubro, 2013

MEC LEGM

Capacidade e Condensadores

Tubos de fluxo

- Aplicando a Lei de Gauss a uma superfície de Gauss formada exclusivamente por linhas de campo que partem da superfície de um condutor positivamente carregado e terminam num outro negativamente carregado podemos concluir que o fluxo deve ser nulo (se fecharmos a superfície de Gauss com bases inteiramente dentro dos respectivos condutores, onde em equilíbrio o campo se anula).

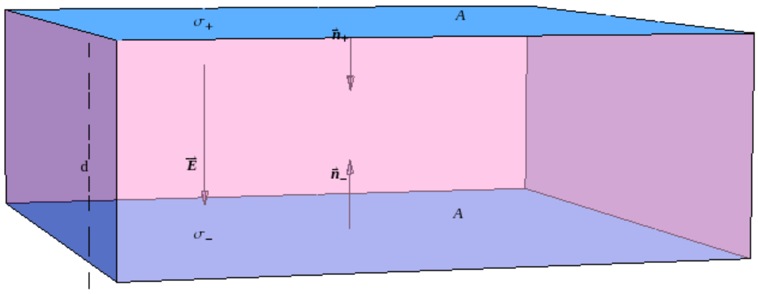


- De facto o campo deve ser sempre tangente às linhas de campo, e consequentemente tangente à superfície de Gauss formada por elas, pelo que $\vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{S}} \equiv 0$ em qualquer ponto da superfície assim formada.
- Mas então a carga interior Q_{int} a uma tal superfície de Gauss deve ser nula, o que só pode acontecer se $Q_+ + Q_- = 0$, onde $Q_\pm$ representam as cargas superficiais delimitadas pela superfície de Gauss nos condutores onde as linhas de campo se originam e terminam.
- Um tal tubo de linhas de campo conjuntamente com as secções dos condutores em que se baseiam (armaduras) formam um condensador elementar.
- Uma vez que a superfície de cada condutor em equilíbrio é uma equipotencial, todas as cargas Q_+ estão ao no mesmo potencial φ_+, e todas as cargas $Q_- = -Q_+$ estão também no mesmo potencial φ_-. Podemos assim definir únicamente o conceito de Capacidade dum condensador.
- A **capacidade** C de um condensador é a razão entre a carga Q na armadura positiva e a queda de potencial ou tensão $V = \varphi_+ - \varphi_-$ entre as armaduras.

$$C = \frac{Q}{V} \quad (F = Farad)$$

- No sistema de unidades SI o Farad é evidentemente o mesmo que $\frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}}$.
- Maior capacidade significa poder armazenar mais carga $\pm Q$ nas armaduras para a mesma tensão V.

O condensador plano



- O campo à superfície de um plano uniforme de carga é semelhante ao do centro de um disco carregado com densidade superficial σ, que vimos já ser orientado na direcção $\vec{\boldsymbol{n}}_\pm$ normal à superfície, para cada lado:

$$\vec{\boldsymbol{E}}_S = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon}\,\vec{\boldsymbol{n}}_\pm$$

- Num condensador plano, desprezando os efeitos fronteira, desde que a separação d entre as armaduras seja pequena comparada com as dimensões lineares desta, ou seja $d \ll \sqrt{A}$, podemos considerar que o campo no seu interior é constante e igual à sobreposição dos campos das duas armaduras, com cargas Q e $-Q$ que se distribuem sobre a área A em cada armadura.

$$\sigma_+ = -\sigma_- = \frac{Q}{A}$$

- Dentro do condensador a permitividade eléctrica é $\varepsilon = \varepsilon_r\,\varepsilon_o$, e as normais às armaduras são opostas, $\vec{\boldsymbol{n}}_+ = -\vec{\boldsymbol{n}}_-$, pelo que os campos se adicionam devido à polaridade diferente das cargas

$$\vec{\boldsymbol{E}}\,(\vec{\boldsymbol{r}}_{int}) = \vec{\boldsymbol{E}}_+\,(\vec{\boldsymbol{r}}_{int}) + \vec{\boldsymbol{E}}_-\,(\vec{\boldsymbol{r}}_{int}) = \frac{\sigma_+}{2\,\varepsilon}\,\vec{\boldsymbol{n}}_+ + \frac{\sigma_-}{2\,\varepsilon}\,\vec{\boldsymbol{n}}_- = \frac{Q}{\varepsilon\,A}\,\vec{\boldsymbol{n}}_+$$

- Como deve ser o campo fora do condensador e na sua vizinhança?
Conhecido o campo $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}_{\text{int}})$ podemos determinar o potencial $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}_{\text{int}})$ que lhe está associado através de $\vec{\boldsymbol{E}}\,(\vec{\boldsymbol{r}}_{\text{int}}) = -\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}_{\text{int}})$. Neste caso, fazendo $\vec{\boldsymbol{n}}_+ = -\vec{\boldsymbol{e}}_z$, obtemos imediatamente

$$\varphi\,(z\,) = \frac{Q}{\varepsilon\,A}\,z + \varphi_o$$

- A queda de potencial entre as armaduras separadas por uma distância d é assim

$$V = \varphi\,(d) - \varphi_o = \frac{Q}{\varepsilon\,A}\,d$$

- A capacidade do condensador é pela definição

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon A}{d}$$

Capacidade de uma Esfera Isolada

- Como as linhas de campo dum condutor isolado se estendem indefinidamente, podemos considerar que a outra armadura do condensador está infinitamente distante e ao potencial $\varphi_\infty = 0$. Assim a superfície do condutor funciona como a armadura dum condensador com uma diferença de potencial igual ao potencial constante do condutor.
- No caso duma esfera de raio R, e na ausência de outras cargas e campos, a distribuição das cargas à superfície é uniforme com densidade constante $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$.

  Vimos já que neste caso o campo gerado pela esfera é equivalente, fora dela, ao de uma carga pontual Q no seu centro. Assim o potencial à superfície deve ser igual a

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{R} \qquad (V)$$

- A capacidade C de um condensador é definida como a razão entre a carga Q armazenada numa armadura e a queda de potencial $V = \varphi - \varphi_\infty$ suportada pelas armaduras. Neste caso

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_o R \qquad (F)$$

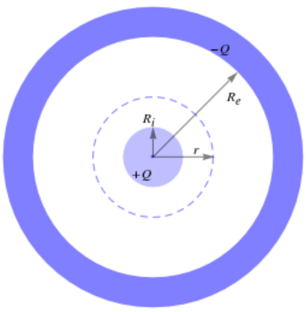
  - Para a Terra $R_\oplus = 6.4\times10^6\, m$ obtém-se

$$C = 4\pi\varepsilon_o R_\oplus = \frac{6.4\times10^6}{9\times10^9} \approx 0.7\, mF$$

  - Para uma esfera de raio $R = 10^{-2}\, m$ a capacidade é

$$C = \frac{10^{-11}}{9} \approx 1\, pF$$

Exemplo: Condensador de armaduras esféricas



- Considerando que o espaço entre as armaduras está vazio, ou seja a permitividade elétrica é ε_o, podemos usar a lei de Gauss e a simetria do campo para deduzir que

$$\oiint_S \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_o} = E_r(r)\, 4\,\pi\, r^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad E_r\,(r) = \frac{Q_{int}}{4\,\pi\,\varepsilon_o}\,\frac{1}{r^2}$$

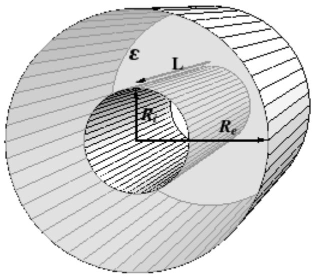
Por outro lado

$$V = \varphi_i - \varphi_e = -\int_{R_e}^{R_i} E_r(\,r)\,dr = \frac{Q_{int}}{4\,\pi\,\varepsilon_o}\int_{R_i}^{R_e}\frac{1}{r^2}\,dr = \frac{Q_{int}}{4\,\pi\,\varepsilon_o}\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_e}\right) \equiv \frac{Q_{int}}{C}$$

- Capacidade

$$C = 4\,\pi\,\varepsilon_o\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_e}\right)^{-1} = \frac{4\,\pi\,\varepsilon_o\,R_i\,R_e}{R_e - R_i}$$

Exemplo: Condensador de Cilindros Condutores Coaxiais



- Superfície de Gauss=Cilindro coaxial de raio *r* e altura *h*.

$$\oiint_{S_h} \vec{\boldsymbol{D}} \cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = Q_{int} = \varepsilon\, E_r(r)\, 2\,\pi\, r\, h \qquad \Leftrightarrow \qquad E_r(r) = \frac{Q_{int}}{2\,\pi\,\varepsilon}\,\frac{1}{r\,h}$$

$$V = \varphi_i - \varphi_e = -\int_{R_e}^{R_i} E_r(r)\,dr = \frac{Q_{int}}{2\,\pi\,h\,\varepsilon}\int_{R_i}^{R_e}\frac{1}{r}\,dr = \frac{Q_{int}\,log\left(\frac{R_e}{R_i}\right)}{2\,\pi\,h\,\varepsilon} \equiv \frac{Q_{int}}{C}$$

- Capacidade por unidade de comprimento

$$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{h}} = \frac{2\,\pi\,\varepsilon}{log\left(\frac{\mathrm{R_e}}{\mathrm{R_i}}\right)}$$

Energia potencial eletrostática

- A energia potencial electrostática duma carga q é o trabalho realizado para deslocar a carga num campo exterior $\vec{E} = -\nabla\varphi$ desde o infinito para a sua posição final sem lhe atribuir outras formas de energia (por exemplo cinética). A força electrostática mínima que actua na carga é

$$\vec{F} = q\,\vec{E} = -\vec{F}^{ext}$$

$$U_q^{ext} = \int_{\infty \to f} \vec{F}^{ext} \cdot d\vec{r} = -\int_{\infty \to f} q\,\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = q(\varphi_f - \varphi_\infty) = q\,V$$

Energia Electroestática em Condensadores

- No caso dum condensador, a tensão V depende da carga q existente na armadura, por isso a energia necessária para retirar carga infinitesimal dq da armadura negativa e levá-la para a positiva vencendo a tensão $V(q) = \frac{q}{C}$ é

$$dU = V\,dq = \frac{q}{C}\,dq$$

- O processo de carga de um condensador de capacidade C até armazenar uma carga Q na sua armadura positiva requer a realização de trabalho contra a tensão que entretanto se vai estabelecendo entra as armaduras, e que termina tendo o valor $V = \frac{Q}{C}$. A energia eletrostática armazenada é

$$U_c = \int_0^{U_c} dU = \int_0^{Q} \frac{q}{C}\,dq$$

- Esta expressão é geral e válida para qualquer condensador de capacidade C.

$$U_c = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{C} \equiv \frac{1}{2}\,C\,V^2 \equiv \frac{1}{2}\,Q\,V$$

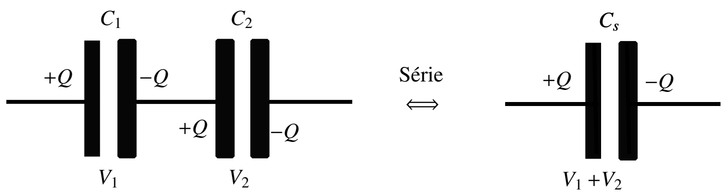
Exemplo: Densidade de Energia num Condensador plano de área A e separação d

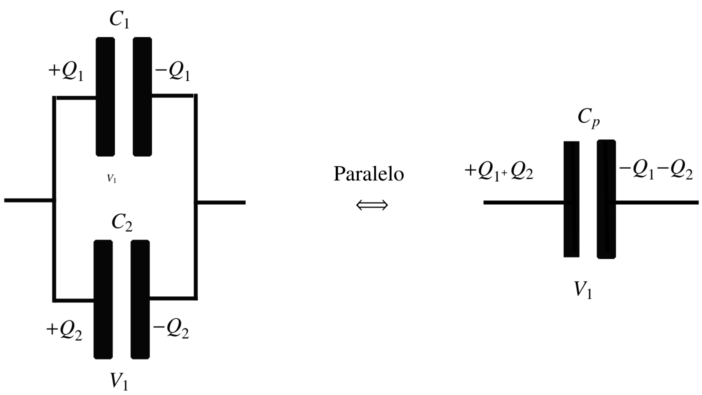
- Relembrando que a capacidade dum condensador plano é $C = \frac{\varepsilon_o A}{d}$, a sua energia armazenada quando a diferença de potencial é V será $U_c = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_o A}{d} V^2$.
- A densidade de energia por unidade de volume pode ser escrita em termos do campo eléctrico $\vec{\boldsymbol{E}}$ entre as armaduras:

$$u_c = \frac{U_c}{A\,d} = \frac{\frac{1}{2} C\,V^2}{A\,d} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_o \left(\frac{V}{d}\right)^2 = \frac{1}{2}\,\varepsilon_o\,E^2$$

Condensadores em Série e Paralelo

- Um sistema de condensadores, inicialmente descarregados, pode ser ligado de forma a ter duas configurações básicas, em série e em paralelo:





- Quando em série as seguintes equações são válidas

$$\begin{cases} V_1 = \frac{1}{C_1} Q \\ V_2 = \frac{1}{C_2} Q \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad V \equiv V_1 + V_2 = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) Q \equiv \frac{1}{C_s} Q$$

- Em paralelo tem-se por outro lado

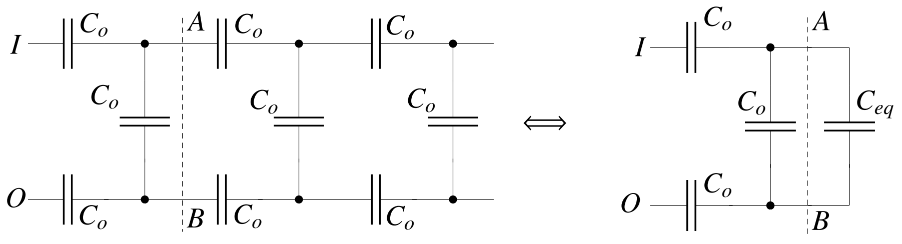
$$\begin{cases} Q_1 = C_1 V_1 \\ Q_2 = C_2 V_1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad Q \equiv Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2) V_1 \equiv C_p V$$

- Assim em geral podemos escrever

$$C_s = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}\right)^{-1} \quad ; \quad C_p = \sum_{i=1}^{N} C_i$$

Problema: Cadeia infinita de Condensadores

- Determine a capacidade equivalente de uma linha infinita de condensadores em série e paralelo como idicado na figura.



Assumindo que C_{eq} é a capacidade equivalente, retirar um conjunto de condensadores da extremidadade da linha (à esquerda da secção AB) não deve alterar muito o seu valor.
Assim entre *I* e *O* ficamos com 3 condensadores em série, sendo o segundo um paralelo de dois condensadores C_o e C_{eq}. (Toda a linha à direita da secção AB é substituída por um condensador equivalente de capacidade C_{eq} em paralelo com o condensador do meio C_o.)

Assim

$$\frac{1}{C_o} + \frac{1}{C_o + C_{eq}} + \frac{1}{C_o} = \frac{1}{C_{eq}} \qquad \Longrightarrow \quad C_{eq} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right) C_o$$