Electromagnetismo
e
Óptica

14 Outubro, 2013

MEC LEGM

Lei de Gauss na matéria

Vector de Deslocamento Eléctrico $\vec{D}$.

- Para uma superfície de Gauss S, delimitando um volume V e passando completamente dentro de um dielétrico, contendo cargas livres (ou de condução) Q_c e densidades de cargas de polarização em superfície σ_p e em volume ρ_p, obtemos da lei de Gauss:

$$\iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_o} = \frac{1}{\varepsilon_o}\,(Q_c + Q_p)_{int}$$

onde Q_p designa as vargas de polarização dentro da superfície de Gauss

$$Q_p = \iint_{S_i} \sigma_p(\vec{r}_i)\, dS_i(\vec{r}_i) + \iiint_V \rho_p(\vec{r})\, dV(\vec{r})$$

As cargas de polarização num dielétrico têm que somar zero porque só existem em pares +-.

Assim, qualquer que seja o volume de dielétrico a considerar

$$\iint_{S_i} \sigma_p(\vec{r}_i)\cdot dS_i(\vec{r}_i) + \iiint_{\mathfrak{v}} \rho_p(\vec{r})\, d\mathfrak{v}(\vec{r}) = -\iint_{S_e} \sigma_p(\vec{r}_e)\, dS_e(\vec{r}_e)$$

onde S_i representa qualquer superfície interna do dielétrico, e $S_e = S = \partial\mathfrak{v}$ é a fronteira do volume de dielétrico dentro da superfície de Gauss S.

$$\iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o}\left(Q_c - \iint_S \vec{P}\cdot d\vec{S}\right) \iff \iint_S \left(\varepsilon_o \vec{E} + \vec{P}\right)\cdot d\vec{S} = Q_c$$

- Desta forma obtemos a **Lei de Gauss Genaralizada** a dielétricos

---

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_c$$

---

onde designámos por $\vec{D}$ o vector de **Deslocamento Elétrico**

$$\vec{D} = \varepsilon_o \vec{E} + \vec{P}$$

- De acordo com a lei de Gauss generalizada tem-se assim que a **carga livre** Q_c interna a $S = \partial\mathfrak{v}$ é

$$\iint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} \equiv \iiint_{\mathfrak{v}} \nabla\cdot\vec{D}\, d\mathfrak{v} = Q_c$$

pelo que podemos assemelhar $\nabla\cdot\vec{D}$ a uma densidade volúmica de carga livre ρ_c.

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_c$$

Permitividade elétrica e constante dielétrica

- Para meios lineares, homogéneos e isotrópicos (LHI) e campos pequenos comparados com o campo de rotura, podemos usar

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_o \vec{E}$$

onde χ_e se designa a **Suscetividade Eléctrica**.

Nesse caso podemos sempre definir

$$\vec{D} = \varepsilon_o \vec{E} + \vec{P} = (1 + \chi_e)\varepsilon_o \vec{E} \equiv \varepsilon \vec{E}$$

onde

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_o$$

é a **Permitividade Eléctrica** do material e

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e$$

a **Permitividade Relativa** ou **Constante Dielétrica** do material.

- Desta equação conclui-se que, conhecido $\vec{E}$ é possível determinar a polarização em meios (LIH) como

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_o \vec{E} \equiv (\varepsilon - \varepsilon_o)\vec{E}$$

ou seja

$$\chi_e = \frac{\varepsilon - \varepsilon_o}{\varepsilon_o}$$

Constantes dielétricas e campos de Rotura

Material	*Constante Dielétrica* ε_r	*Campo Rotura* $(10^6$ V/m$)$
Vácuo	1	—
Teflon	2.1	60
Óleo Silicone	2.5	15
Polistireno	2.56	24
Mylar	3.2	7
Cloreto Polivinil	3.4	40
Nylon	3.4	14
Papel em Parafina	3.5	11
Papel	3.7	16
Quartz Fundido	3.78	8
Baquelite	4.9	24
Vidro Pirex	5.6	14
Porcelana	6	12
Borracha Neopreno	6.7	12
Ar seco	59.	3
Água	80.	—
Titanato Estrôncio	233.	8

Descontinuidade do campo através duma superficie carregada.

- A Lei de Gauss implica que na passagem de uma superfície carregada com densidade de carga σ, a componente normal

$$\vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = E_n$$

do campo eléctrico $\vec{\boldsymbol{E}}$ sofra uma descontinuidade.

- No caso geral, se a superfície separar duas regiões de permitividades ε_I e ε_{II}, o uso da Lei de Gauss com o vector $\vec{\boldsymbol{D}} = \varepsilon \vec{\boldsymbol{E}}$ numa caixa elementar S com bases de área $S_{\mathcal{B}}$ paralelas à superfície de separação, de cada lado desta, permite ver que no limite em que a altura de S tende para zero,

$$\Phi_S(\vec{\boldsymbol{D}}) = \left(\vec{\boldsymbol{D}}_I \cdot \vec{\boldsymbol{n}}_I + \vec{\boldsymbol{D}}_{II} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}_{II}\right) S_{\mathcal{B}} = \left(\vec{\boldsymbol{D}}_{II} - \vec{\boldsymbol{D}}_I\right) \cdot \vec{\boldsymbol{n}}_{II}\, S_{\mathcal{B}} = \sigma_C\, S_{\mathcal{B}}$$

já que $\vec{\boldsymbol{n}}_I = -\vec{\boldsymbol{n}}_{II}$, ou seja

$$\left(\vec{\boldsymbol{D}}_{II} - \vec{\boldsymbol{D}}_I\right) \cdot \vec{\boldsymbol{n}}_{II} = \sigma_C \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon_{II}\, E_{II}^{\perp} - \varepsilon_I\, E_I^{\perp} = \sigma_C$$

Se usarmos a Lei de Gauss com o campo $\vec{\boldsymbol{E}}$ obtemos em vez disso

$$\Phi(\vec{\boldsymbol{E}}) = \left(\vec{\boldsymbol{E}}_I \cdot \vec{\boldsymbol{n}}_I + \vec{\boldsymbol{E}}_{II} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}_{II}\right) S_{\mathcal{B}} = \left(\vec{\boldsymbol{E}}_{II} - \vec{\boldsymbol{E}}_I\right) \cdot \vec{\boldsymbol{n}}_{II}\, S_{\mathcal{B}} = \frac{\sigma_C + \sigma_P}{\varepsilon_O}\, S_{\mathcal{B}}$$

ou seja

$$\varepsilon_O(E_{II}^{\perp} - E_I^{\perp}) = \sigma_C + \sigma_P$$

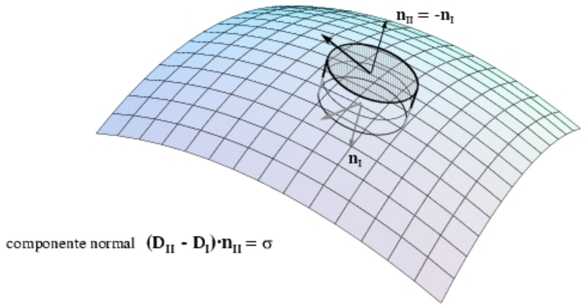
Assim, mesmo que não existem cargas livres na superfície de separação dos dois dielétricos ($\sigma_C = 0$), a componente normal de $\vec{\boldsymbol{E}}$ sofre uma descontinuidade quando há cargas de polarização $\sigma_P \neq 0$, mas a componente normal de $\vec{\boldsymbol{D}}$ é contínua através da transição.

Por outro lado, as componentes do campo $\vec{\boldsymbol{E}}$ paralelas à interface entre os dois meios devem ser iguais dos dois lados, como consequência do Teorema de Stokes para um campo potencial

$$\oint_\gamma \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad E_I^{\shortparallel} = E_{II}^{\shortparallel} \quad \Longleftrightarrow \quad D_I^{\shortparallel} = \frac{\varepsilon_I}{\varepsilon_{II}}\, D_{II}^{\shortparallel}$$

onde a componente paralela é

$$\left(\vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{n}}\right) \times \vec{\boldsymbol{n}} = E^{\shortparallel}$$



Na passagem de um meio dielétrico para outro, na ausência de cargas de condução $(\sigma_c = 0)$, deve verificar-se

$$\varepsilon_{II}\, E_{II}^{\perp} = \varepsilon_I\, E_I^{\perp} \quad ; \qquad E_{II}^{\parallel} = E_I^{\parallel} \qquad \Longrightarrow \qquad \varepsilon_{II}\, \frac{E_{II}^{\perp}}{E_{II}^{\parallel}} = \varepsilon_I\, \frac{E_I^{\perp}}{E_I^{\parallel}}$$

$$tan(\theta_{II}) = \frac{\varepsilon_I}{\varepsilon_{II}}\, tan(\theta_I)$$

Determinação das Cargas Superficiais de Polarização num dielétrico homogéneo.

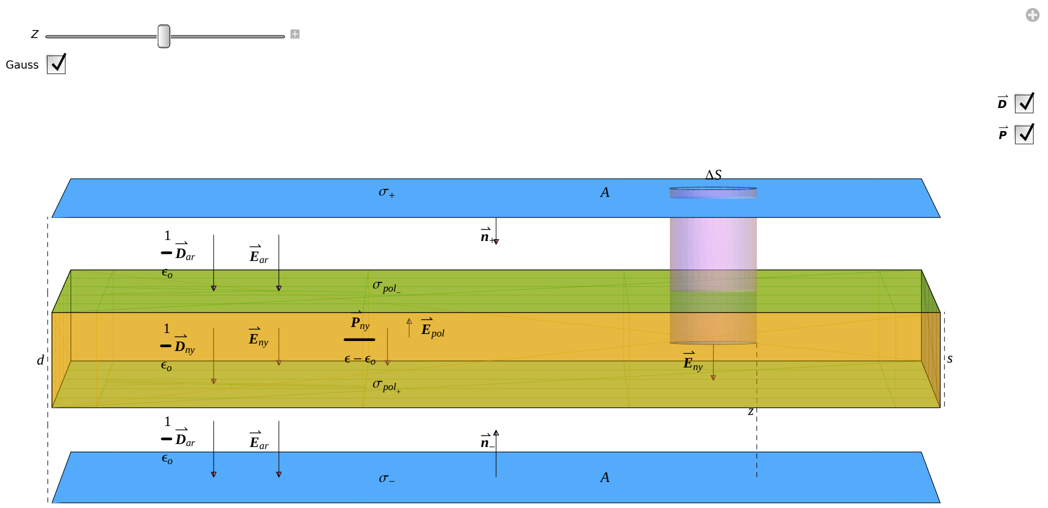
- Num condensador plano de área A junto à armadura positiva a lei de Gauss para um cilindro elementar que atravessa a armadura e entra no dielétrico indica que a carga interior ao cilindro é $A(\sigma_c + \sigma_p)$ e portanto

$$\varepsilon_o \oiint_{gauss} \vec{E} \cdot d\vec{S} = A\left(\sigma_c + \sigma_p\right)$$

- Multiplicando ambos os lados pela constante dielétrica ε_r concluímos que

$$\varepsilon_r A\left(\sigma_c + \sigma_p\right) = \varepsilon_r \varepsilon_o \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = A\,\sigma_c$$

$$\sigma_p = \frac{1 - \varepsilon_r}{\varepsilon_r}\,\sigma_c \equiv -\frac{\varepsilon - \varepsilon_o}{\varepsilon}\,\sigma_c$$



Problema: Condensador com placa de nylon

Um condensador de placas paralelas tem uma área $A = 0.1\, m^2$ e uma distância entre placas de $d = 3\, mm$.

A meio no seu interior está uma placa de nylon de espessura $s = 1$ mm. A constante dielétrica relativa do nylon é $\varepsilon_r = 3.4$, e suporta um campo eléctrico máximo de $14 \times 10^6\ \frac{V}{m}$.

A constante dielétrica relativa do ar é $\varepsilon_r = 1.00059 \sim 1$ e suporta um campo eléctrico máximo de $3 \times 10^6\ \frac{V}{m}$.

Uma das armaduras tem uma carga $Q = 1.5 \times 10^{-8}\, C$ (a outra tem uma carga $-Q$).

Calcule o campo eléctrico no ar e no nylon dentro do condensador.

- Como deve variar o campo eléctrico $\vec{E}$ ao passar do ar para o nylon?

$$\vec{E}_{ny} == \vec{E}_{ar} + \vec{E}_{pol}$$

- Como deve variar o campo de deslocamento eléctrico $\vec{D}$ ao passar do ar para o nylon?

$$\left(\vec{D}_{ar} - \vec{D}_{ny}\right) \cdot \vec{n}_+ == 0$$

- Qual é a relação entre $\vec{P}$ e o deslocamento eléctrico $\vec{D}_{\mathrm{ny}}$?

$$\vec{D}_{ny} == \varepsilon_o \vec{E}_{ny} + \vec{P} \underset{LIH}{==} \varepsilon \vec{E}_{ny}$$

- Qual é a relação entre $\vec{P}$ e o campo eléctrico $\vec{E}_{\mathrm{ny}}$?

$$\vec{P} == (\varepsilon - \varepsilon_o)\vec{E}_{ny} == \varepsilon_o \chi_e \vec{E}_{ny} \underset{LIH}{==} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\vec{D}_{ny}$$

- Qual é a relação entre a densidade das cargas superficiais de polarização σ_{pol} e a polarização $\vec{P}$?

$$\sigma_{p_+} == \vec{P} \cdot \vec{n}_+ == \sigma_c \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$

$\sigma_c = \sigma_+$ representa apenas cargas livres de condução.

- Em que sentido aponta o campo $\vec{E}_{\mathrm{pol}}$ de polarização? E o vector de polarização $\vec{P}$?

$$\vec{P}\ //\ \vec{D}\ //\ -\vec{E}_{pol}$$

- Qual é a densidade de carga $\sigma_\pm$ nas armaduras do condensador?

$$\sigma_+ = -\sigma_- = \frac{Q}{A}$$

Como é o campo dentro do condensador plano ?

Dado que $\sqrt{A} = 0.3\,m \gg d = 0.003\,m$ vamos assumir que o campo interno no condensador é aproximadamente invariante para deslocamentos horizontais. Desprezando variações nas fronteiras, o campo deve ser vertical em todos os pontos no interior.

$$\Phi_{cyl} = \oiint_{cyl} \vec{\boldsymbol{D}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, dS = Q_c \qquad ou \qquad \Phi_{cyl} = \oiint_{cyl} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, dS = \frac{Q_c}{\varepsilon}$$

O vector deslocamento eléctrico $\vec{\boldsymbol{D}} = \varepsilon\,\vec{\boldsymbol{E}}$ relaciona-se com a carga livre Q_c (carga de condução) dentro do cylindro de Gauss. A vantagem de usar a primeira forma da lei de Gauss é que não existe referência explícita à constante dielétrica do meio (se houvesse contribuições para o fluxo devidas a campos em meios diferentes, que ε se usaria na lei de Gauss?).

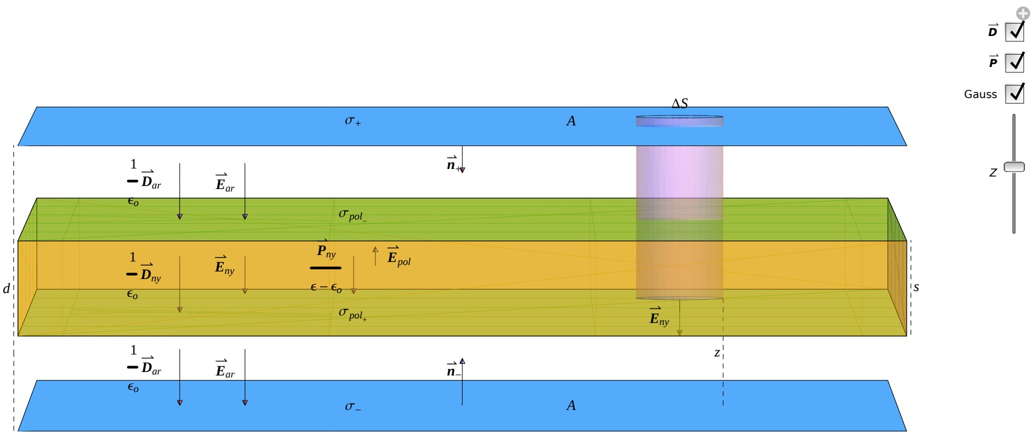
$$\Phi_{cyl}(z) == \vec{\boldsymbol{D}}(z) \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\,\pi\, r^2 == \sigma_+\,\pi\, r^2 \qquad \therefore \qquad \vec{\boldsymbol{D}}(z) == \sigma_+\,\vec{\boldsymbol{n}}_+$$

Neste caso verifica-se que não existe dependência explícita em z, ou seja $\vec{\boldsymbol{D}}$ é constante em todo o condensador. Num dielétrico com permitividade relativa $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o}$ o campo eléctrico deve ser

$$\vec{\boldsymbol{E}} == \frac{1}{\varepsilon_r\,\varepsilon_o}\,\vec{\boldsymbol{D}} \qquad \therefore \qquad \begin{cases} \vec{\boldsymbol{E}}_{ar} == \dfrac{\sigma_+}{\varepsilon_o}\,\vec{\boldsymbol{n}}_+ \equiv \dfrac{Q}{\varepsilon_o\,A}\,\vec{\boldsymbol{n}}_+ & no\,ar\ \varepsilon_r \approx 1 \\ \vec{\boldsymbol{E}}_{ny} == \dfrac{\sigma_+}{\varepsilon_r\,\varepsilon_o}\,\vec{\boldsymbol{n}}_+ \equiv \dfrac{Q}{\varepsilon_r\,\varepsilon_o\,A}\,\vec{\boldsymbol{n}}_+ & no\,nylon \end{cases}$$

Para os valores dados

$$\begin{cases} \vec{\boldsymbol{E}}_{ar} == 4\,\pi \times 9 \times 10^9\ \dfrac{1.5\times10^{-8}}{10^{-1}}\,\vec{\boldsymbol{n}}_+ & E_{ar} = 16.964 \times 10^3\ \left(\frac{V}{m}\right) \\ \vec{\boldsymbol{E}}_{ny} == 4\,\pi \times 9 \times 10^9\ \dfrac{1.5\times10^{-8}}{3.4\times10^{-1}}\,\vec{\boldsymbol{n}}_+ & E_{ny} = 4.989 \times 10^3\ \left(\frac{V}{m}\right) \end{cases}$$



Qual é a capacidade do condensador?

A capacidade dum condensador é a razão entre a carga armazenada e a queda de potencial $V = \varphi_+ - \varphi_-$ entre as armaduras.

$$C == \frac{Q}{V} \qquad (F)$$

Uma forma simples de resolver consiste em notar que $E_{\mathrm{ar}} \frac{d}{3} = -\Delta\varphi_{\mathrm{ar}}$ e $E_{\mathrm{ny}} \frac{d}{3} = -\Delta\varphi_{\mathrm{ny}}$ em cada segmento do condensador, pelo que

$$V == -2\,\Delta\varphi_{ar} - \Delta\varphi_{ny} == -\left(2\,E_{ar} + E_{ny}\right)\frac{d}{3}$$

Substituindo os valores de E_{ar} e E_{ny} determinados antes obtém-se a definição de C

$$C == \frac{3\,Q}{\left|2\,E_{ar} + E_{ny}\right| d} == \frac{3\,\varepsilon_r}{(2\,\varepsilon_r + 1)}\,\frac{\varepsilon_o\,A}{d}$$

Para uma solução mais completa note que o potencial associado ao campo $\vec{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{ar}}$ é tal que $-\nabla\varphi_{\mathrm{ar}} = \vec{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{ar}}$. Para um campo constante na direcção $\vec{\boldsymbol{n}}_+ = -\vec{\boldsymbol{e}}_z$ deve-se ter

$$\varphi_{ar}[z] == \varphi_0 + \frac{Q}{\varepsilon_O\,A}\,z \qquad\qquad para\; z \in \left[\frac{2}{3}\,d,\; d\right]$$

Dentro do nylon o potencial associado ao campo $\vec{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{ny}}$ é

$$\varphi_{ny}[z] == \varphi_1 + \frac{Q}{\varepsilon_r\,\varepsilon_O\,A}\,z \qquad\qquad para\; z \in \left[\frac{1}{3}\,d,\; \frac{2}{3}\,d\right]$$

. ;

Na região do ar abaixo do nylon o campo volta a ser $\vec{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{ar}}$ e o potencial associado é

$$\varphi_{ar}[z] = \varphi_2 + \frac{Q}{\varepsilon_O\,A}\,z \qquad para\; z \in \left[0,\; \frac{1}{3}\,d\right]$$

Como o potencial $\varphi[z]$ deve ser uma função contínua, nas regiões fronteira deve-se ter coincidência para os valores do potencial de cada lado.

$$\varphi_{ar}[d] == \varphi_+ \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_+ - \varphi_0 = \frac{Q}{\varepsilon_o\,A}\,d$$

$$\varphi_{ar}\left[\frac{2}{3}\,d\right] == \varphi_{ny}\left[\frac{2}{3}\,d\right] \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_0 - \varphi_1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right)\frac{Q}{\varepsilon_o\,A}\,d$$

$$\varphi_{ny}\left[\frac{1}{3}\,d\right] == \varphi_{ar}\left[\frac{1}{3}\,d\right] \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right)\frac{Q}{\varepsilon_o\,A}\,d$$

$$\varphi_{ar}[0] == \varphi_- \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_2 - \varphi_- = 0$$

As constantes nas expressões do potencial ficam assim determinadas

$$\varphi_2 = \varphi_-$$

$$\varphi_1 = \varphi_- - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right)\frac{Q}{\varepsilon_O\, A}\, d$$

$$\varphi_0 = \varphi_- + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right)\frac{Q}{\varepsilon_O\, A}\, d$$

$$\varphi_+ = \varphi_- + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\varepsilon_r} + 2\right)\frac{Q}{A\, \varepsilon_o}\, d$$

A queda de potencial entre armaduras $V = \varphi_+ - \varphi_-$ é

$$V == \varphi_+ - \varphi_- == \frac{1}{3}\left(2 + \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\frac{Q}{\varepsilon_O\, A}\, d$$

$$V == \frac{1}{3} \times \left(2 + \frac{1}{3.4}\right) \times 4\,\pi \times 9 \times 10^9 \times \frac{1.5 \times 10^{-8}}{10^{-1}} \times 3 \times 10^{-3} == 38.92 \qquad (V)$$

A capacidade requerida é

$$C == \frac{Q}{V} == \frac{3\,\varepsilon_r\,\varepsilon_o\, A}{(2\,\varepsilon_r + 1)\, d}$$

$$C == \frac{3 \times 3.4 \times \frac{1}{36\,\pi} \times 10^{-9} \times 10^{-1}}{(2 \times 3.4 + 1) \times 3 \times 10^{-3}} == 3.85 \times 10^{-10} \quad (F)$$

Qual é a energia armazenada nesse condensador?

A energia armazenada num condensador corresponde ao trabalho realizado contra o seu campo interno para separar as cargas que estão nas armaduras. Assim, se a carga na armadura positiva é Q e a queda de potencial é V, então a energia total é, tendo em conta que $C = \frac{Q}{V}$

$$U_c == \int_0^Q V(q)\, dq == \int_0^Q \frac{q}{C}\, dq == \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} == \frac{1}{2} C V^2 == \frac{1}{2} V Q$$

Tendo obtido V e C na alínea anterior basta substituir em qualquer das expressões equivalentes

$$U_c == \frac{1}{2} V Q == \frac{1}{6}\left(2 + \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \frac{Q^2}{\varepsilon_o A} d$$

$$U_c == \frac{1}{6}\left(2 + \frac{1}{3.4}\right) \times 4\pi \times 9 \times 10^9 \times \frac{\left(1.5 \times 10^{-8}\right)^2}{10^{-1}} \times 3 \times 10^{-3} == 2.92 \times 10^{-7}\ (J)$$

$$U_c == \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} == \frac{1}{2} \frac{\left(1.5 \times 10^{-8}\right)^2}{3.85 \times 10^{-10}} == 2.92 \times 10^{-7}\quad (J)$$

$$U_c == \frac{1}{2} C V^2 == \frac{1}{2} \times 3.85 \times 10^{-10} \times (38.92)^2 == 2.92 \times 10^{-7}\ (J)$$

Como faria para calcular a energia associada ao campo eléctrico do condensador?

Note-se que a energia pode ser considerada como existente no campo eléctrico, com densidade

$$u_e = \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{E}}\cdot\vec{\boldsymbol{D}} = \frac{1}{2\,\varepsilon}|\vec{\boldsymbol{D}}|^2$$

Assim, dado que neste caso $\vec{\boldsymbol{D}} = \sigma_+\,\vec{\boldsymbol{n}}_+$ é constante dentro de todo o condensador, e zero fora dele, é fácil calcular a energia total tendo em conta $\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{\varepsilon}\vec{\boldsymbol{D}}$ e o volume $\mathfrak{v}_{\text{ar}} = 2\,\mathfrak{v}_{\text{ny}} = A\,\frac{d}{3}$:

$$U_c = \int_{\mathfrak{v}_{tot}} u_e\,d\mathfrak{v} = \int_{\mathfrak{v}_{tot}} \frac{1}{2\,\varepsilon}|\vec{\boldsymbol{D}}|^2\,d\mathfrak{v} = \frac{\sigma_+{}^2}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_o}\mathfrak{v}_{ar} + \frac{1}{\varepsilon}\mathfrak{v}_{ny}\right)$$

$$U_c = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\left(\frac{Q}{A}\right)^2\frac{A}{\varepsilon_o}\,\frac{d}{3} = \frac{1}{6}\left(2 + \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\frac{Q^2}{\varepsilon_o\,A}\,d$$

Qual é a maior carga que esse condensador pode armazenar sem correr riscos de uma descarga?

O campo de descarga do condensador é o menor dos campos máximos suportados pelos seus dielétricos. Neste caso $E_{\text{ar max}} = 3\times 10^6\,\frac{V}{m}$, o que significa que a carga na armadura positiva se mantém para valores inferiores a este. Como $E_{\text{ar}} = \frac{\sigma_+}{\varepsilon_o} = \frac{Q}{\varepsilon_o\,A}$ obtemos para a máxima carga no condensador

$$Q_{max} = \varepsilon_o\,A\,E_{ar\,max} = \frac{1}{4\,\pi\times 9}\times 10^{-9}\times 10^{-1}\times 3\times 10^6 = 2.65\times 10^{-6} \qquad (C)$$

Esta carga não é suficiente para danificar o condensador porque o campo dentro do nylon para esta carga é

$$E_{ny} = \frac{Q_{max}}{\varepsilon_r\,\varepsilon_o\,A} = \frac{1}{\varepsilon_r}E_{ar\,max} \ll E_{ny\,max}$$

Assim a descarga não passa através do nylon. De facto seria necessária uma carga muito maior para causar a rotura no nylon

$$Q_{rot} = \varepsilon_r\,\varepsilon_o\,A\,E_{ny\,max} = 3.4\times\frac{1}{4\,\pi\times 9}\times 10^{-9}\times 10^{-1}\times 14\times 10^6 = 42\times 10^{-6} \qquad (C)$$

Estando o condensador em circuito aberto, o que acontece à diferença de potencial entre as armaduras quando a placa de nylon é retirada?

Em circuito aberto as armaduras estão isoladas, e portanto a sua carga mantém-se invariante. Assim, quando a placa de nylon é retirada, a queda de potencial entre as armaduras passa a ser a de um condensador com capacidade $C_{\text{ar}} = \frac{\varepsilon_o A}{d}$

$$V_{ar} == \frac{Q}{C_{ar}} == \frac{Q}{\varepsilon_o A}\, d == 50.89 \quad (V)$$

Este valor é maior que o anterior $V == \frac{1}{3}\left(2 + \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\frac{Q}{\varepsilon_o A}\, d ==$ 38.92 V. A diferença de potencial entre as armaduras aumenta.

Qual é o trabalho que é preciso efectuar para retirar essa placa de nylon?

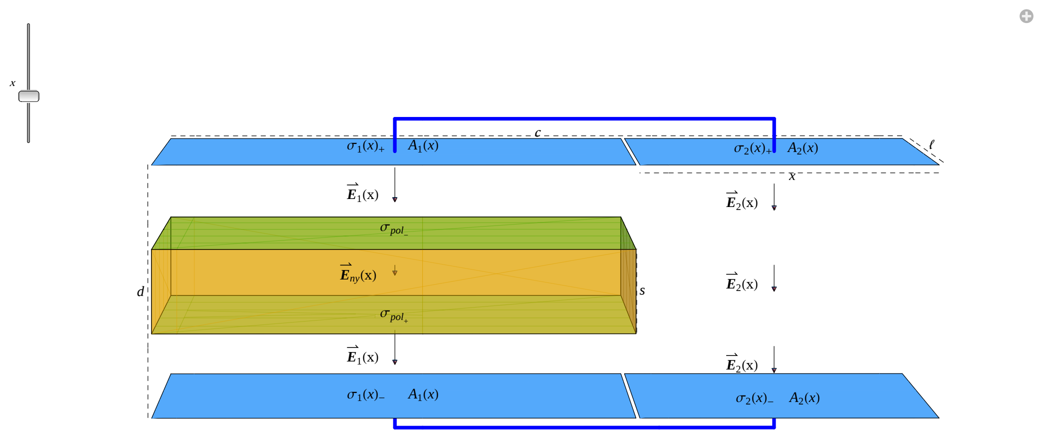
Como vimos que a diferença de potencial no condensador aumenta quando se retira o nylon em circuito aberto, isso significa que a energia armazenada também aumenta, ou seja agora

$$U_{ar} == \frac{1}{2}\, Q\, V_{ar} == \frac{1}{2} \times 1.5 \times 10^{-8} \times 50.89 \;\; == 3.81 \times 10^{-7} \;\; (J)$$

A diferença de energia armazenada só pode ser justificada como o trabalho realizado sobre o condensador para retirar o dieléctrico. Assim

$$\Delta U == U_{ar} - U_c == \; 3.817 \times 10^{-7} \; - 2.918 \times 10^{-7}\, (J) == 8.98 \times 10^{-8} \; (J)$$

Qual é a Força aplicada sobre o dielétrico?



A capacidade do condensador com o nylon retirado x metros na direcção $\vec{\mathbf{e}}_x$ pode ser calculada como a de dois condensadores em paralelo, um com nylon e área $A_1[x] = (A - x\,\ell)$ e outro só com ar e área $A_2[x] = x\,\ell$, onde ℓ é a largura da armadura (dimensão na direcção $\vec{\mathbf{e}}_y$). A capacidade dos dois é a soma das capacidades de cada um, e assim

$$C[x] == \; C_1[x] + C_2\,[x] == \frac{3\,\varepsilon_r\,\varepsilon_o\,A_1[x]}{(2\,\varepsilon_r + 1)\,d} + \frac{\varepsilon_o\,A_2[x]}{d}$$

$$A_1[x] = A - x \times \ell \quad ; \qquad A_2[x] = x \times \ell \;\; ; \qquad\quad A = \ell \times c$$

$$C[x] == \frac{(1 - \varepsilon_r)\,\varepsilon_o\,\ell}{d\,(1 + 2\,\varepsilon_r)}\, x + \frac{3\,A\,\varepsilon_o\,\varepsilon_r}{d\,(1 + 2\,\varepsilon_r)} \;\; == \alpha\, x \; + \beta$$

$$\alpha == \frac{(1-\varepsilon_r)\,\varepsilon_o\,\ell}{d\,(1+2\,\varepsilon_r)} \qquad ; \qquad \beta == \frac{3\,A\,\varepsilon_o\,\varepsilon_r}{d\,(1+2\,\varepsilon_r)}$$

Assim, ao retirar o dieléctrico de nylon estamos a fazer variar contínuamente a capacidade do condensador, que varia linearmente com x na forma $C[x] = \alpha\, x + \beta$, e como a sua energia armazenada é $U_c = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{C}$ obtemos para uma pequena variação de C que

$$dU_c == -\frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{C^2}\,dC$$

A expressão para a variação de energia armazenada passa assim a escrever-se em função de x como

$$dU_c[x] == -\frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{(\alpha\, x\ +\beta)^2}\,\alpha\, dx == \vec{\boldsymbol{F}}\cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$$

Desta expressão deduzimos que a força sobre o dieléctrico de nylon que realiza este trabalho é

$$\vec{\boldsymbol{F}}[x] = -\frac{1}{2}\,\frac{\alpha\, Q^2}{(\alpha\, x\ +\beta)^2}\,\vec{\boldsymbol{e}}_x$$

Se assumirmos que x varia entre 0 e o comprimento c, o trabalho total para extrair o nylon será

$$\Delta U_c == \int dU_c\,[x] == -\frac{1}{2}\,Q^2 \int_0^c \frac{1}{(\alpha\, x\ +\beta)^2}\,\alpha\, dx == \frac{1}{2}\,Q^2 \left[\frac{1}{\alpha\, x\ +\beta}\right]_0^c == \frac{1}{2}\,Q^2 \left(\frac{1}{\alpha\, c+\beta} - \frac{1}{\beta}\right)$$