2 Descrição do movimento de um ponto material no espaço e no tempo

2.1. Num instante t_i um corpo parte de um ponto x_i num movimento de translação a uma dimensão, com módulo da velocidade v_i e aceleração constante de módulo a. Num instante posterior t_f o corpo alcançou o ponto x_f com velocidade de módulo v_f.

a) Demonstre que o módulo da velocidade média, v_m, é dado pela expressão:

$$v_m = \frac{v_f + v_i}{2} \ .$$

Resolução:

Como o corpo se desloca com aceleração constante a distância percorrida no intervalo de tempo $t_f - t_i$ é dada por

$$x_f - x_i = v_i \left(t_f - t_i\right) + \frac{1}{2} a \left(t_f - t_i\right)^2 \ ,$$

donde, o módulo da velocidade média, v_m virá

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} \\ &= v_i + \frac{1}{2} a \left(t_f - t_i\right) \ . \end{aligned}$$

Por outro lado, também sabemos que, para este tipo de movimento, a variação do módulo da velocidade com o tempo foi

$$v_f = v_i + a \left(t_f - t_i\right) \ .$$

Usando o último termo do membro direito desta expressão na expressão do módulo da velocidade média, temos

$$\begin{aligned} v_m &= v_i + \frac{1}{2} \left(v_f - v_i\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(v_f + v_i\right) \ . \end{aligned}$$

como pretendiamos demonstrar.

b) Demonstre que:

$$v_f^2 = v_i^2 + 2\,a\,(x_f - x_i)\ .$$

Resolução:

Partindo da expressão anterior para a variação temporal do módulo da velocidade, podemos escrever

$$(t_f - t_i) = \frac{v_f - v_i}{a}\ .$$

Substituindo este valor para $(t_f - t_i)$ na expressão da distância percorrida obtemos a relação desejada:

$$\begin{aligned}
x_f - x_i &= v_i\left(\frac{v_f - v_i}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{v_f - v_i}{a}\right)^2 \\
&= \left(v_i + \frac{1}{2}(v_f - v_i)\right)\left(\frac{v_f - v_i}{a}\right) \\
&= \frac{1}{2}(v_f + v_i)\left(\frac{v_f - v_i}{a}\right) \\
&= \frac{1}{2a}(v_f^2 - v_i^2)
\end{aligned}$$

2.2. Uma pedra é lançada à superfície da Terra na vertical, para cima, com velocidade inicial $\vec{v}_\mathrm{o} = v_\mathrm{o}\vec{e}_y$. Considere o instante do lançamento $t_\mathrm{o} = 0\,\mathrm{s}$.

a) Sabendo que o movimento da pedra se faz com uma aceleração constante $\vec{g}$, calcule as expressões para $v(t)$, o módulo da velocidade em função do tempo, e para $y(t)$, a posição em função do tempo.

Resolução:

O movimento tem lugar unicamente ao longo do eixo yy, sendo o sentido da aceleração oposto ao da velocidade. Tomamos para a posição inicial o valor 0. Assim, para o módulo da velocidade e posição devemos escrever

$$v(t) = v_\mathrm{o} - g\,t \qquad (2.1)$$

$$y(t) = v_\mathrm{o}t - \frac{1}{2}g\,t^2 \qquad (2.2)$$

---

b) Calcule o instante $t_{\max}$ em que atinge a altura máxima $h_{\max}$. Qual a velocidade nesse instante?

Resolução:

No ponto de altura máxima o módulo da velocidade é zero. Da equação (2.1) tiramos

$$v(t_{max}) = 0 \Rightarrow t_{max} = \frac{v_\mathrm{o}}{g}$$

---

c) Calcule a altura máxima $h_{\max}$ atingida pela pedra.

Resolução:

Conhecido t_{max}, por substituição na equação (2.2), temos

$$h_{max} = y(t_{max}) \Rightarrow h_{max} = \frac{1}{2}\frac{v_\mathrm{o}^2}{g}$$

---

d) Calcule ao fim de quanto tempo a pedra volta a passar no ponto de partida e a velocidade nesse instante.

Resolução:

Usando a equação (2.2) com $y(t) = 0$, obtemos o tempo de retorno, t_{ret}

$$0 = v_\mathrm{o} t_{ret} - \frac{1}{2} g\, t_{ret}^2 \Rightarrow t_{ret} = \frac{2v_\mathrm{o}}{g}$$

e, usando agora valor na equação (2.1),

$$v_{ret} = v_\mathrm{o} - g\,\frac{2v_\mathrm{o}}{g} \Rightarrow v_{ret} = -v_\mathrm{o}$$

---

e) Considere $|\vec{v}_\mathrm{o}|$=2 m/s e $|\vec{g}| = 9,8$ m/s². Calcule $h_{\max}$ e $t_{\max}$.

Solução: $h_{max} = 0.20\,\mathrm{m}$, $t_{max} = 0.20\,\mathrm{s}$

2.3. Uma pedra é lançada à superfície da Terra com uma velocidade inicial que faz um ângulo α com a horizontal. Considere que a velocidade inicial da pedra é

$$\vec{v}_\mathrm{o} = v_{\mathrm{o}x}\vec{e}_x + v_{\mathrm{o}y}\vec{e}_y$$

e que a aceleração gravítica é $\vec{g} = -9,8\vec{e}_y$ m/s². Para efectuar cálculos considere os seguintes valores para as componentes da velocidade inicial: $v_{\mathrm{o}x} = 3$ m/s e $v_{\mathrm{o}y} = 2$ m/s.

a) Sabendo que o movimento da pedra se faz com aceleração constante pelo eixo dos yy e com velocidade constante pelo eixo dos xx, calcule $v_y(t)\,, y(t)\,, v_x(t)$ e $x(t)\,.$

b) Relacione $v_{\mathrm{o}x}$ e $v_{\mathrm{o}y}$ com o ângulo α e com v_{o}, o módulo da velocidade inicial.

c) Calcule a expressão para t_{max} correspondente ao instante em que a pedra atinge a altura máxima, y_{max}, em função do ângulo α e de v_{o}. Qual o módulo da velocidade nesse instante?

   Solução: $3\,\mathrm{m/s}$

d) Calcule a expressão para o instante em que a pedra cai no solo.

e) Demonstre que a pedra cai no solo a uma distância do ponto de lançamento dada pela expressão:

$$x_{\mathrm{max}} = \frac{v_{\mathrm{o}}^2}{g}\sin(2\alpha)$$

f) Demonstre que

$$y(x) = a + b\,x + c\,x^2$$

   onde $a = y_{\mathrm{o}}\,,\ b = \tan(\alpha)$ e $c = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_{\mathrm{o}}^2\cos^2\alpha}$. Verifique que $y(x)$ corresponde à equação de uma parábola.

2.4. Pretende-se que uma bola, lançada do solo com velocidade inicial $\vec{v}_{\mathrm{o}}$, atinja – no ponto mais alto da sua trajectória – a caixa de uma carrinha (LEGO) colocada em cima de uma mesa. A velocidade da bola no instante em que colide com a carrinha é $\vec{v} = 3\,\vec{e_x}\,\mathrm{m/s}$. A caixa da carrinha está a uma altura $h = 0,9\,\mathrm{m}$ do solo. Considere que é a essa altura que se dá a colisão. Calcule o módulo da velocidade inicial da bola e o ângulo de lançamento θ (isto é, o ângulo entre o vector velocidade e o solo).

Resolução:

Uma vez que a velocidade da bola, ao atingir a carrinha, tem uma componente horizontal, a bola foi lançada na diagonal. Como a aceleração gravítica só altera a componente vertical da velocidade, v_y, temos de calcular o seu valor inicial. Ora usando a expressão do exercício 1.b) podemos escrever, para o ponto em que a bola atinge a carrinha,

$$0 = v_{\mathrm{oy}}^2 - 2g\,h\ ,$$

e obter a componente yy da velocidade inicial: $v_{\mathrm{o}y} = \sqrt{2\,g\,h}$. Para o módulo da velocidade teremos

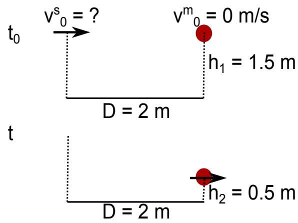
$$\begin{aligned} |\vec{v}_{\mathrm{o}}| &= \sqrt{v_{\mathrm{o}x}^2 + v_{\mathrm{o}y}^2} \\ &= \sqrt{v_{\mathrm{o}x}^2 + 2\,g\,h} \end{aligned}$$

Por sua vez o ângulo de lançamento será

$$\begin{aligned}\theta &= \arctan\left(\frac{v_{oy}}{v_{ox}}\right)\\ &= \arctan\left(\frac{\sqrt{2\,g\,h}}{v_{ox}}\right)\end{aligned}$$

Substituindo valores obtemos $|\vec{v}_o| = 5,16\,\mathrm{m/s}$, $\theta = 54,5°$.

2.5. Uma seta e uma maça estão inicialmente à mesma altura h_1 do chão, sendo $h_1 = 1,5\,\mathrm{m}$. A distância da seta à maçã é de $D = 2\,\mathrm{m}$. Um dispositivo assegura que quando a seta é lançada no sentido da maçã, esta é deixada cair na vertical sem velocidade inicial. Verifica-se que a seta atinge o alvo a uma altura do chão $h_2 = 0,5\,\mathrm{m}$.



a) Qual a velocidade inicial mínima que deverá ter a seta para que possa atingir a maçã, em função da distância D e da altura h?

Resolução:

A velocidade mínima necessária da seta calcula-se a partir do tempo de vôo da maçã até chegar à terra:

$$\begin{aligned}\Delta y &= h = \frac{1}{2}\,g\,t^2\\ \Rightarrow t &= \sqrt{\frac{2h}{g}}\end{aligned}$$

A velocidade mínima para poder percorrer a distância D no tempo $t = \sqrt{2h/g}$ é:

$$v_{\min}\vec{e_x} = \frac{D}{\sqrt{2h/g}}\vec{e_x} = D\sqrt{\frac{g}{2h}}\vec{e_x}$$

---

b) Qual o intervalo de tempo entre o instante em que a seta é lançada e o instante em que atinge a maçã?

Resolução:

O intervalo de tempo entre o instante em que a seta é lançada e o instante em que atinge a maçã corresponde ao tempo que a maçã (e a seta) precisa para cair $1\,\mathrm{m}$ (de h_1 a h_2). Logo:

$$t = \sqrt{\frac{2(h_1 - h_2)}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1\ m}{9,8\ m/s^2}} = 0,45\ s$$

---

c) Qual a velocidade inicial da seta?

Resolução:

A velocidade da seta na direcção xx não muda até ao impacto e não existe aceleração nesta direcção. Logo:

$$\Rightarrow v_0 = \frac{D}{t} = \frac{2\,\mathrm{m}}{0,45\,\mathrm{s}} = 4,4\,\mathrm{m/s}$$

---

d) Se por falha do sistema, a seta e a maçã fossem lançadas em instantes diferentes e não houvesse colisão, quais seriam as componentes das velocidades de ambas quando tocassem no chão? Ao fim de quanto tempo chegariam ao chão?

Resolução

maçã: O tempo de vôo é calculada a partir da fórmula deduzida em a)

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,5\,\mathrm{m}}{9,8\,\mathrm{m/s^2}}} = 0,55\,\mathrm{s}$$

A velocidade da maçã só tem componente na direcção yy e a velocidade é dada por:

$$v\vec{e}_y = (v_0 - g\,t)\vec{e}_y = -g\,t\,\vec{e}_y = -9,8\,\mathrm{m/s^2} \cdot 0,55\,\mathrm{s}\,\vec{e}_y = -5,4\,\vec{e}_y\,\mathrm{m/s}$$

seta: O tempo de vôo da seta é igual ao da maçã uma vez que a força gravítica é igual para ambas. A velocidade da seta na direcção xx foi calculado em c) e a velocidade em yy é igual a velocidade da maçã calculada na linha anterior. Logo:

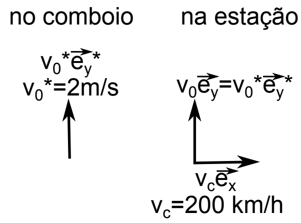
$$\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y = (4,4\vec{e}_x - 5,4\vec{e}_y)\,\mathrm{m/s}$$

2.6. Um passageiro dentro de um comboio atira uma pedra ao ar com velocidade $\vec{v_\mathrm{o}^*} = v_\mathrm{o}^*\,\vec{e_y^*}$, onde $v_\mathrm{o}^* = 2\,\mathrm{m/s}$. A pedra não toca no tecto da carruagem. Analise o movimento da pedra do ponto de vista do passageiro dentro do comboio e de uma pessoa na estação, em relação à qual o comboio se desloca com velocidade constante $v_\mathrm{c} = 200\,\mathrm{km/h}$.

a) Verifique que as equações do movimento da pedra para o passageiro do comboio são dadas por:

$$\begin{aligned} y^*(t) &= y_\mathrm{o}^* + v_{\mathrm{o}y}^* t - \frac{1}{2}gt^2 \\ x^*(t) &= x_\mathrm{o}^* \end{aligned}$$

Resolução:



Para o passageiro no comboio (sistema de coordenadas do comboio) a pedra não se desloca na direção x. Logo:

$$x^*(t) = x_\mathrm{o}^*$$

O deslocamento em y^* é descrito pelas equações de movimento a uma dimensão e com aceleração constante (neste caso $-g$). Logo:

$$y^*(t) = y_0^* + v_0^*\, t - \frac{1}{2}\, g\, t^2$$

---

b) Ao fim de quanto tempo a pedra atinge a altura máxima para o passageiro do comboio?

Resolução

A altura máxima é atingida quando $v_y^* = 0$. Logo:

$$\begin{aligned} v_y^* &= v_{0y}^* - g\, t = 0 \\ \Rightarrow t &= \frac{v_{0y}^*}{g} = \frac{2\,\mathrm{m/s}}{9,8\,\mathrm{m/s^2}} = 0,2\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

---

c) Verifique que as equações do movimento da pedra para o passageiro na estação são dadas por:

$$\begin{aligned} y(t) &= y^*(t) = y_\mathrm{o}^* + v_{\mathrm{o}y}^* t - \frac{1}{2} g\, t^2 \\ x(t) &= v_\mathrm{c} t + x^*(t) = v_\mathrm{c} t + x_\mathrm{o}^* \,. \end{aligned}$$

Resolução:

A equação do movimento em y é equivalente para o passageiro na estação e no comboio uma vez que a velocidade do comboio na direção y é zero e os movimentos em y e x são independentes. Logo:

$$y(t) = y^*(t) = y_0^* + v_{0y}^*\, t - \frac{1}{2} g\, t^2 \,.$$

Para o passageiro na estação o movimento da pedra na direcção x corresponde ao movimento do comboio mais o movimento da pedra dentro do comboio na direcção x (a última sendo zero no nosso caso). Logo:

$$x(t) = v_c\, t + x^*(t) = v_c\, t + x_\mathrm{o}^*$$

---

d) Ao fim de quanto tempo a pedra atinge a altura máxima para o passageiro na estação?

Resolução:

O tempo é igual ao tempo calculado em b) uma vez que o movimento em y está descrito pelas mesmas equações para ambos os passageiros e o movimento em x e y são independentes.

---

e) Com base nos resultados anteriores demonstre que, para um observador na estação a trajectória da pedra é uma parábola, cuja equação é dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= y_o^* + \frac{v_{oy}^*}{v_c} x(t) - \frac{1}{2}\frac{g}{v_c^2} x^2(t) \\ x(t) &= v_c t + x^*(t) \;=\; v_c t + x_o^* \end{aligned}$$

Resolução:

Eliminando t nas equações em c) obtem-se:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_c\, t + x_0^* \\ \Rightarrow t &= \frac{x(t) - x_0^*}{v_c} \end{aligned}$$

e logo:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0^* + v_{0y}^*\, t - \frac{1}{2} g\, t^2 \\ &= y_0^* + \frac{v_{0y}^*}{v_c}(x(t) - x_0^*) - \frac{1}{2}\frac{g}{v_c^2}(x(t) - x_0^*)^2 \end{aligned}$$

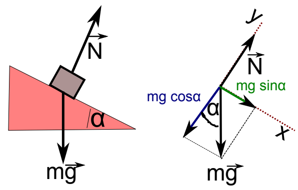
com $x_o^* = 0$ obtem-se:

$$y(t) = y_0^* + \frac{v_{0y}^*}{v_c} x(t) - \frac{1}{2}\frac{g}{v_c^2} x(t)^2$$

2.7. Num simulador de vôo de um Boeing 737 pretende-se simular uma travagem do avião após uma aterragem. O comandante tem 1000 metros de pista para parar e tocou a pista a 180 km/h. A sensação de travagem é conseguida inclinando o módulo do simulador. Qual o ângulo a que se deve inclinar o módulo do simulador para simular esta travagem e para que o piloto sinta a mesma desaceleração? Quais as conclusões desta experiência no que diz respeito à comparação entre a massa gravitacional e a massa inercial?

Resolução:

A magnitude da componente da aceleração gravítica do módulo do simulador dirigida na direcção x (ver figura) corresponde à magnitude de aceleração, a, do avião. Logo:



$$\begin{aligned} g\sin(\alpha) &= a \\ \Rightarrow \sin(\alpha) &= a/g \end{aligned}$$

Escrevendo as equações de movimento para o avião com $v_0 = 180\,{}^{\mathrm{km}}\!/\!_{\mathrm{h}} = 50\,{}^{\mathrm{m}}\!/\!_{\mathrm{s}}$ e o tempo de aterragem t_A temos:

$$v(t_A) = 0 = v_0 + a\,t \tag{2.3}$$

$$x(t_A) = v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2 \tag{2.4}$$

Da equação (2.3) tiramos:

$$a = -\frac{v_0}{t}$$

Substituindo este valor em (2.4) temos:

$$\begin{aligned} x(t_A) &= v_0\,t - \frac{1}{2}\,v_0\,t = \frac{1}{2}v_0\,t \\ t &= 2x(t_A)/v_0 \end{aligned}$$

Substituindo este valor de t na equação da aceleração temos:

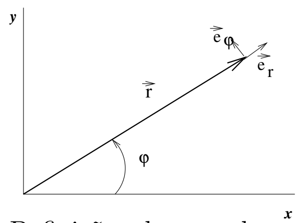
$$a = -\frac{v_0^2}{2x(t_A)} = -\frac{(50\,{}^{\mathrm{m}}\!/\!_{\mathrm{s}})^2}{2\cdot 1000\,\mathrm{m}} = 1,25\,{}^{\mathrm{m}}\!/\!_{\mathrm{s}^2}$$

E logo:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{a}{g}\right) = \arcsin\frac{1,25\,{}^{\mathrm{m}}\!/\!_{\mathrm{s}^2}}{9,8\,{}^{\mathrm{m}}\!/\!_{\mathrm{s}^2}} = 7,3^{\mathrm{o}}$$

Solução: 7.3°

2.8. A escolha de um referencial e de um sistema de eixos adequado pode simplificar bastante a análise do movimento de um corpo. Para o demonstrar, na aula teórica analisou-se o caso do movimento circular uniforme de um corpo usando coordenadas polares (r, φ), como definido na figura ao lado.



Definição de coordenadas polares

Seja $\vec{r}$ o raio vector que caracteriza a posição do corpo A e $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$. Seja r o módulo de $\vec{r}$. Os versores $\vec{e}_r$ e $\vec{e}_\varphi$ estão definidos na figura.

a) Defina o vector $\vec{r}$ em coordenadas polares.

Resolução:

Em coordenadas polares $\vec{r}$ está orientado segundo o versor $\vec{e}_r$, logo $\vec{r} = r\,\vec{e}_r$

---

b) Sabendo que o ângulo φ varia com o tempo, considere $\omega = d\varphi/dt$. Calcule a velocidade $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ em coordenadas polares. Indique as componentes radial e tangencial da velocidade. *Sugestão*: Comece por demonstrar que $d\vec{e_r}/dt = \omega\vec{e_\varphi}$ e $d\vec{e_\varphi}/dt = -\omega\vec{e}_r$.

Resolução:

Seguindo a sugestão de resolução, comecemos por escrever os versores dos eixos polares segundo as coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y\end{aligned}$$

derivando agora os versores dos eixos polares, tem-se

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = (-\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y)\,\frac{d\varphi}{dt} = \omega\vec{e}_\varphi \tag{2.5}$$

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = (-\cos\varphi\,\vec{e}_x - \sin\varphi\,\vec{e}_y)\,\frac{d\varphi}{dt} = -\omega\vec{e}_r \tag{2.6}$$

Podemos agora calcular a velocidade $\vec{v}$ a partir da expressão da alínea anterior,

$$\vec{v} = \frac{d|\vec{r}|}{dt}\vec{e}_r + |\vec{r}|\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

usando a expressão (2.5) obtemos,

$$\vec{v} = \frac{d|\vec{r}|}{dt}\vec{e}_r + |\vec{r}|\omega\vec{e}_\varphi \tag{2.7}$$

O primeiro termo do membro esquerdo da equação é a velocidade radial e o segundo a velocidade tangencial.

---

c) Calcule a aceleração do corpo em coordenadas polares no caso particular do movimento circular uniforme. Identifique as componentes radial e tangencial. Qual a aceleração centrípeta?

Resolução:

No movimento circular o raio é constante pelo que, na equação (2.7) o primeiro termo é nulo. Derivando a velocidade, tem-se

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d|\vec{r}|}{dt}\omega\vec{e}_\varphi + |\vec{r}|\frac{d\omega}{dt}\vec{e}_\varphi + |\vec{r}|\omega\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}$$

Como o movimento é circular uniforme, além do raio não variar, a velocidade angular também é constante. Logo os dois primeiros termos do membro esquerdo são nulos. Por fim, usando a equação (2.6) podemos escrever

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -|\vec{r}|\omega^2\vec{e}_r$$

isto é, só existe uma aceleração centrípeta.

---

d) Obtenha a expressão para $\vec{v}$ e $\vec{a}$ em coordenadas cartesianas (x, y) para o movimento circular uniforme.

Resolução:

A partir dos valores $\vec{v} = |\vec{r}|\omega\vec{e}_\varphi$ e $\vec{a} = -|\vec{r}|\omega^2\vec{e}_r$, e usando a expressão dos versores polares segundo as coordenadas cartesianas da alínea b):

$$\begin{aligned}\vec{v} &= -r\omega\sin\alpha\vec{e}_x + r\omega\cos\alpha\vec{e}_y \\ \vec{a} &= -r\omega^2\cos\alpha\vec{e}_x - r\omega^2\sin\alpha\vec{e}_y\end{aligned}$$

2.9. Calcule a velocidade de um corpo relativamente a um sistema inercial de coordenadas que passa pelo centro da Terra no caso em que o corpo está situado num ponto sobre o equador terreste e com velocidade nula relativamente à Terra.

Solução: $\vec{v} \simeq 1,7 \times 10^3\, \vec{e}_\varphi\, {}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{h}}$