4 Trabalho e Energia

4.1. Num corpo actua uma força dada pela expressão $\vec{F} = (3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y)\,\mathrm{N}$. Calcule o trabalho que essa força realiza no deslocamento desse corpo ao longo das seguintes possíveis trajectórias:

a) Desde o ponto A de coordenadas $(x, y) = (0, 0)\,\mathrm{m}$ até B de coordenadas $(x, y) = (9, 0)\,\mathrm{m}$

Solução: $27\,\mathrm{J}$

b) Desde o ponto B definido anteriormente até C de coordenadas $(x, y) = (9, 12)\,\mathrm{m}$

R: $48\,\mathrm{J}$

c) Desde o ponto A até ao ponto C definidos anteriormente mas indo directamente em linha recta.

R: $75\,\mathrm{J}$

4.2. Num ponto à superfície da Terra a força gravítica que actua num corpo de massa m é dada por $\vec{F} = m\vec{g} = -m\,g\vec{e}_y$.

a) Qual o trabalho dessa força no deslocamento vertical de um corpo de $y_i = h_i$ até $y_f = h_f$. Compare as situações em que $h_i > h_f$ e $h_i < h_f$.

b) Determine a variação da energia potencial gravítica desse corpo durante o movimento definido anteriormente.

c) Determine a variação da energia cinética.

d) Considere h_i e h_f a altitude do corpo no instante inicial e final, respectivamente. Responda às alíneas anteriores mas invertendo o sistema de coordenadas, i.e. considerando que $\vec{F} = m\vec{g} = m\,g\vec{e}_y$.

4.3. Uma massa está presa a uma mola num plano horizontal. Quando a massa é afastada da posição de equilíbrio numa distância x, fica sujeita a uma força proporcional a x e dada pela expressão $\vec{F} = -k\,x\vec{e}_x$, onde k é uma característica da mola a que se chama coeficiente de elasticidade da mola.

a) Indique uma experiência de fácil execução que lhe permita medir k.

b) Qual o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ sobre a massa no deslocamento dessa massa de x_i para x_f?

Solução: $W = \frac{1}{2}k{x_i}^2 - \frac{1}{2}k{x_f}^2$

c) Compare o resultado da alínea anterior com o a variação da energia potencial elástica da massa ligada à mola.

Solução: $W = E_{p_i} - E_{p\,f}$

d) Responda à pergunta anterior para os seguintes casos:

i. $x_i = 5\,\mathrm{cm}$ e $x_f = 7\,\mathrm{cm}$;

ii. $x_i = 7\,\mathrm{cm}$ e $x_f = 5\,\mathrm{cm}$;

iii. $x_i = -5\,\mathrm{cm}$ e $x_f = -7\,\mathrm{cm}$;

iv. $x_i = 5\,\mathrm{cm}$ e $x_f = -5\,\mathrm{cm}$;

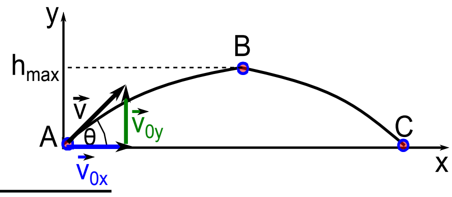
v. $x_i = 7\,\mathrm{cm}$ e $x_f = 7\,\mathrm{cm}$, sendo que a massa partiu do ponto $x_i = 7\,\mathrm{cm}$ e regressou a $x_f = 7\,\mathrm{cm}$ após ter oscilado em torno da posição de equilíbrio.

4.4. Um projéctil de massa m é lançado do solo com velocidade inicial $\vec{v} = v_{\mathrm{o}x}\vec{e}_x + v_{\mathrm{o}y}\vec{e}_y$. Menospreze o atrito do ar. Calcule:

a) A expressão para o ângulo da velocidade, no momento do lançamento, com o plano horizontal;

Resolução:

$$\theta = \arctan\left(\frac{v_{\mathrm{o}y}}{v_{\mathrm{o}x}}\right)$$



---

b) A energia mecânica do projéctil no ponto A correspondente ao ponto de lançamento e indique a expressão para a energia cinética e para a energia potencial;

Resolução:

Na ausência de atrito, a energia mecânica, E_M, é a soma da energia cinética, $E_c = \frac{1}{2}\,m\,v^2$, e da energia potencial, $E_p = m\,g\,h$. No ponto A a energia potencial é zero, $E_{p|A} = 0$ $(h = 0)$. Logo:

$$E_{M|A} = E_{c|A} = \frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{1}{2}\,m\,[v_{\mathrm{o}x}^2 + v_{\mathrm{o}y}^2]$$

---

c) A energia mecânica do projéctil no ponto B correspondente ao ponto em que atinge a altura máxima e indique a expressão para a energia cinética e para a energia potencial;

Resolução:

No ponto B temos:

$$\begin{aligned} v_{By} &= 0 \\ v_{Bx} &= v_{0x} \\ E_{M|B} &= E_{c|B} + E_{p|B} = \frac{1}{2}\, m\, v_{0x}^2 + m\, g\, h_{max} \end{aligned}$$

Da conservação da energia segue-se:

$$\begin{aligned} E_{M|A} &= E_{M|B} \\ \frac{1}{2}\, m\, [v_{0x}^2 + v_{0y}^2] &= \frac{1}{2}\, m\, v_{0x}^2 + m\, g\, h_{max}\ , \end{aligned}$$

donde obtemos

$$h_{max} = \frac{v_{0y}^2}{2\, g}$$

---

d) A energia mecânica do projéctil no ponto C, quando atinge novamente o solo e indique a expressão para a energia cinética e para a energia potencial.

Resolução:

No ponto C temos:

$$\begin{aligned} h &= 0, \quad \Rightarrow \quad E_{p|C} = mgh = 0 \\ E_{M|C} &= E_{c|C} + E_{p|C} = \frac{1}{2}\, m\, v_C^2 \end{aligned}$$

Da conservação de energia segue-se:

$$\begin{aligned} E_{M|A} &= E_{M|C} = E_{c|A} = E_{c|C} \\ \Rightarrow v_C &= v_A \end{aligned}$$

4.5. Um corpo de massa $m = 10\,\text{g}$ desliza sem atrito num plano inclinado como indicado na figura 4.1. A representa o ponto de onde o corpo é largado com velocidade inicial nula.

a) Calcule a energia mecânica do corpo no ponto A.
Compare com a energia potencial e com a energia cinética nesse mesmo ponto.

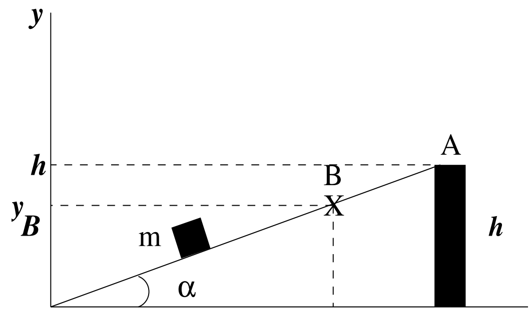


Figura 4.1: Movimento ao longo de um plano inclinado

Resolução:

Na ausência de atrito, a energia mecânica, E_M, é a soma da energia cinética, $E_c = \frac{1}{2}\, m\, v^2$, e da energia potencial, $E_p = mgh$.

$$\begin{aligned} E_{c|A} &= \frac{1}{2}\, m\, v_A^2 = 0 \\ E_{p|A} &= m\, g\, h \\ E_{M|A} &= E_{c|A} + E_{p|A} = mgh \end{aligned}$$

---

b) Calcule a energia mecânica do corpo num ponto qualquer B ao longo do plano, assumindo que não há atrito. Compare com a energia potencial e com a energia cinética.

Resolução:

$$\begin{aligned} E_{c|B} &= \frac{1}{2}\, m\, v_B^2 \\ E_{p|B} &= m\, g\, y_B \\ E_{M|B} &= E_{c|B} + E_{p|B} = \frac{1}{2}\, m\, v_B^2 + m\, g\, y_B \end{aligned}$$

---

c) Qual a velocidade do corpo no final do plano inclinado, considerando que não há atrito. Calcule a energia mecânica.

Resolução:

$$\begin{aligned} E_{c|F} &= \frac{1}{2}\, m\, v_F^2 \\ E_{p|F} &= 0 \\ E_{M|F} &= E_{c|F} + E_{p|F} = \frac{1}{2}\, m\, v_F^2 \end{aligned}$$

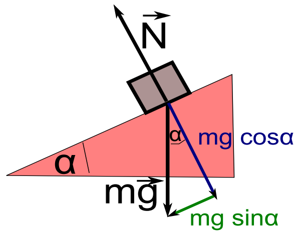
Como consequência da conservação da energia temos:

$$\begin{aligned} E_{M|F} &= E_{M|A} \\ \frac{1}{2}\, m\, v_F^2 &= m\, g\, h \\ v_F &= \sqrt{2gh} \end{aligned}$$

---

d) Qual a velocidade do corpo no final do plano inclinado se, durante a trajectória, o corpo esteve sujeito a uma força de atrito contrária à velocidade e de módulo $F_{\text{atrito}} = \mu\, N$, onde $\mu = 0,3$ é o coeficiente de atrito e N é o módulo da reacção normal à superfície.

Resolução:



A força gravítica pode ser decomposta numa componente paralela e uma ortogonal ao plano inclinado como mostrado na figura. Logo:

$$F_{\text{atrito}} = \mu N = \mu m g \cos(\alpha)$$

O caminho percorrido é:

$$d = \frac{h}{\sin(\alpha)}$$

Para o trabalho produzido pela força de atrito temos:

$$\begin{aligned} E_{\text{atrito}} = -F_{\text{atrito}} \frac{h}{sin(\alpha)} &= E_{MF} - E_{MA} \\ \Leftrightarrow -\frac{\mu m g h}{tan(\alpha)} &= \frac{1}{2} m v_F^2 - m g h \\ &\Rightarrow v_F^2 = 2gh\left(1 - \frac{\mu}{tan(\alpha)}\right) \\ &\Leftrightarrow v_F = \sqrt{2gh\left(1 - \frac{\mu}{tan(\alpha)}\right)} \end{aligned}$$

4.6. Um corpo de massa $m = 10\,\text{g}$ desliza sem atrito numa calha que tem a forma indicada na figura 4.2. A calha faz uma circunferência de raio $R = 10\,\text{cm}$. A representa o ponto de onde o corpo é largado com velocidade inicial nula.

a) Calcule a energia mecânica do corpo no ponto A.
Compare com a energia potencial e com a energia cinética nesse mesmo ponto.

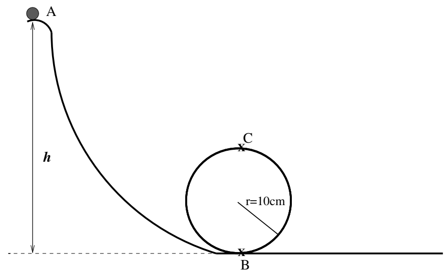


Figura 4.2: Movimento ao longo de uma calha com looping

b) Calcule a energia mecânica do corpo no ponto B.
Compare com a energia potencial e com a energia cinética.

c) Qual a velocidade mínima que deverá ter o corpo em C para que consiga fazer o looping? Qual será nessa situação a energia cinética e a energia potencial?

Solução: $v_{\text{minima}} = \sqrt{gR}\,, E_c = mgR/2\,, E_p = mg(2R) = 2mgR\,.$

d) Demonstre que a altura mínima de que deverá ser largado o corpo para que consiga fazer o looping é dada por $h = \frac{5}{2}R\,.$

4.7. Qual o trabalho da força gravítica, $\vec{F}$, no deslocamento de um corpo de massa m de um ponto situado a uma distância inicial ao centro da Terra, R_i, até um ponto situado a uma distância final R_f do centro da Terra. Considere que o movimento só tem componente radial. Compare a situação em que o corpo se aproxima com a situação em que o corpo se afasta do centro da Terra. Considere que a força força gravítica é dada por

$$\vec{F} = -\frac{GM_{\oplus}m}{R^2}\vec{e}_r\;.$$

Compare com a variação da energia potencial gravítica desse corpo entre a posição inicial e a posição final.

4.8. Demonstre que o trabalho da força gravítica, $\vec{F}$ no deslocamento de um corpo de massa m de um ponto situado a uma altitude, h, até um ponto situado a uma mesma altitude final h sobre a superfície da Terra é nulo. Considere que o módulo da força gravítica é dado por $F = m\,g\,h$.

4.9. Qual a energia total mecânica de um satélite em órbita da Terra? Compare com a energia potencial gravítica e com a energia cinética.

4.10. Uma barragem em descarga tem um caudal máximo de $3400\,\mathrm{m^3/s}$. Sabendo que a altura da barragem é $h = 75\,\mathrm{m}$ qual a potência máxima que idealmente poderia ser extraída por uma central hidroeléctrica nessa barragem? E qual a energia máxima que essa central poderia produzir em um dia?

Resolução:

Ao atravessar uma barragem, a água desce desde aproximadamente o nível da superfície até à tomada de água da barragem e transforma a sua energia potencial em energia cinética, a qual é, em grande parte, comunicada às turbinas. Admitindo que essa altura corresponde à altura da barragem, um dado volume, m, de água ganha uma energia cinética de $E_c = mgh$. admitindo que essa energia é toda extraída, a potência é obtida pela variação temporal desse valor:

$$P_{max} = \frac{dE_c}{dt} = gh\frac{dm}{dt} \ ,$$

onde $\frac{dm}{dt}$ é a massa que atravessa as turbinas por unidade de tempo. Por sua vez, podemos relacionar este valor com o caudal usando $dm = \rho dV$, onde ρ é a densidade da água: $\rho = 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$. Assim, podemos escrever

$$P_{max} = gh\rho\frac{dV}{dt} \ ,$$

onde $\frac{dV}{dt}$ é o caudal indicado. Substituindo valores, obtêm-se $P_{max} = 2,5\,\mathrm{GW}$. Por sua vez, multiplicando pela duração de um dia em segundos, obtemos a energia máxima que se pode produzir nesse período: $E_{max} = 24 \times 3600\,\mathrm{s} \times P_{max} = 216\,\mathrm{TJ}$.

4.11. Qual a velocidade que deverá ter uma nave à superfície da Terra, no pólo Norte, para que possa libertar-se do campo gravitacional da Terra?

4.12. Chegou a sua vez de assegurar o comando de uma nave espacial que desde o dia 20 de Maio está em manobras de aproximação ao planeta Z^*. Actualmente a nave está numa órbita circular em torno desse planeta com um raio de 35 000 km, por razões de segurança. O planeta Z^* é um planeta exterior de um sistema extra-solar e tem a uma massa semelhante à massa da Terra. Os cientistas receberam inicialmente um sinal estranho vindo desse planeta e agora pretendem perceber umas manchas verdes que aparentemente se movem à superície.

Perguntam-lhe por isso se pode passar para uma nova órbita circular com raio de 8750 km. A massa total da nave, incluindo os astronautas, é 20 000 kg. Essa massa manter-se-á praticamente inalterada na viagem pois os motores com que está equipada a nave usam combustível da nova geração GF-PT.

a) É possível que, sem fazer nada, i.e só por acção da força gravítica do planeta, a nave "caia" de uma órbita circular estável com raio de 35 000 km para uma órbita circular de 8750 km?

b) Qual a energia total da nave quando começou a analisar o problema? Qual a relação entre a energia potencial e a energia total?

c) Qual a velocidade orbital, energia cinética e a energia potencial que terá obrigatoriamente a nave para estar em órbita circular a 8750 km? Compare com o resultado da alínea anterior e diga se para fazer a manobra precisa de accionar os motores.

d) Como comandante da nave só pode aceitar passar para uma órbita inferior se conseguir assegurar que os depósitos de energia de reserva da nave lhe permitirem, em situação de emergência, afastar-se do planeta libertando-se completamente da força de atracção gravítica deste. Qual a energia que obrigatoriamente deverá ter de reserva quando estiver em a órbita a 8750 km?

4.13. Como é do seu conhecimento, a energia potencial gravítica de um corpo de massa m à superfície da Terra é geralmente dada por $E_p = m\,g\,h$, onde h é a altura sobre a superfície da Terra a que se encontra o corpo de massa m, $g = 9,8\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2}$. Por outro lado, a energia potencial gravítica de um corpo de massa m a uma distância R do centro da Terra, sendo R maior que o raio da Terra, é dada por

$$E_p = -\frac{GM_{\oplus}m}{R} \ ,$$

onde G é a constante de Newton e $M_{\oplus}$ a massa da Terra.

a) Explique por que motivo para $R = R_{\oplus} + h$ e $h << R_{\oplus}$ se podem usar as duas expressões para energia potencial de um corpo de massa m próximo da superfície da Terra.

b) Use a relação entre força e energia potencial e calcule num e noutro caso, i.e usando cada uma das expressões para a energia potencial acima referidas, a força gravítica que actua em m se $h = 10\,\mathrm{m}$ e $h = 5 \times 10^3\,\mathrm{m}$. Determine o valor para g em cada situação.