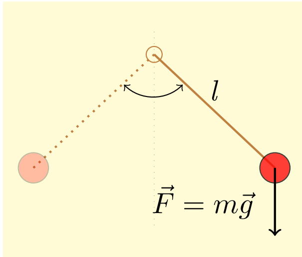
1 Grandezas, unidades e medições de grandezas em Física

1.1. Usando $\boxed{\text{análise dimensional}}$ determine a dependência do $\boxed{\text{período}}$ de um $\boxed{\text{pêndulo gravítico}}$ em função do $\boxed{\text{comprimento do fio}}$ e da $\boxed{\text{aceleração gravítica.}}$



Tipo de problema:

Análise dimensional.

Resolução:

Comecemos por analisar as dimensões das grandezas envolvidas:

Grandeza	Símbolo	Dimensões
período	T	T
comprimento do fio	l	L
aceleração gravitica	g	LT^{-2}

Assim, atendendo às dimensões de cada grandeza, a relação pretendida tem de ser do tipo

$$T \propto \sqrt{l/g}$$

(Nota: $\propto$ é o símbolo de proporcionalidade.)

Verificação:

A variação com o comprimento do fio é a que esperávamos (pêndulos mais compridos têm maior período)? O que é que sucederia se o pêndulo fosse levado para a Lua? Como variava a indicação do tempo de um relógio de pêndulo que fosse levado da Terra para a Lua?

Aprofundamento:

Se quisermos realizar uma análise mais formal podemos começar por escrever a relação entre o período T e as outras duas grandezas como uma função do tipo

$$T = f\left(l^{\alpha}, g^{\beta}\right),$$

onde α e β são números reais. Atendendo às dimensões de cada uma das grandezas vemos que l e g não podem variar de forma independente e que a sua relação tem de ter as dimensões de um tempo. Assim quanto às dimensões, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathrm{T} &= \mathrm{L}^{\alpha}\left(\mathrm{LT}^{-2}\right)^{\beta} \\ &= \mathrm{L}^{\alpha+\beta}\mathrm{T}^{-2\beta} \end{aligned}$$

donde tiramos,

$$\alpha = -\beta,\ \beta = -\frac{1}{2}$$

1.2. Usando $\boxed{\text{análise dimensional,}}$ demonstre que a $\boxed{\text{distância percorrida}}$ por um corpo que se desloca num $\boxed{\text{movimento de translação}}$ com $\boxed{\text{aceleração constante}}$ a uma dimensão depende da $\boxed{\text{posição inicial}}$ x_{o}, da $\boxed{\text{velocidade inicial}}$ v_{o}, do valor da $\boxed{\text{aceleração}}$ a, e do $\boxed{\text{instante}}$ t da seguinte forma:

$$x(t) - x_{\mathrm{o}} = c_1 v_{\mathrm{o}} t + c_2 a t^2\ ,$$

onde c_1 e c_2 são $\boxed{\text{constantes adimensionais.}}$

Tipo de problema:

Análise dimensional.

Resolução:

Comecemos por analisar as dimensões das grandezas iniciais:

Grandeza	**Símbolo**	**Dimensões**
distância percorrida	$x(t) - x_{\mathrm{o}}$	L
velocidade inicial	v_{o}	LT^{-1}
aceleração	a	LT^{-2}
instante	t	T

Atendendo às dimensões de cada grandeza e como o resultado tem de ter as dimensões de um comprimento, L, a velocidade tem de multiplicar por T e a aceleração por T^2.

Usando estes valores, obtemos a relação pretendida, onde c_1 e c_2 têm de ser adimensionais.

1.3. Para o problema anterior, demonstre que as constantes c_1 e c_2 têm como valores $c_1 = 1$ e $c_2 = \frac{1}{2}$. Isto é,

$$x(t) - x_o = v_o t + \frac{1}{2} a t^2 \ .$$

1.4. A que corresponde, em unidades do sistema internacional: 1 kWh, 1 eV, 900 $^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{h}}$, 50 $^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{h}}$ e 1 erg?

Resolução

A seguinte tabela indica das unidades mais usadas do sistema internacional (SI):

Grandeza	**Unidade**	**Símbolo**
comprimento	metro	m
massa	quilograma	kg
tempo	segundo	s
carga eléctrica	coulomb	C
temperatura	kelvin	K
energia	joule	J
potência	watt	W
quantidade de matéria	mole	mol
actividade (de um radionuclido)	becquerel	Bq

Algumas grandezas físicas e as suas unidades SI:

Grandeza	**Símbolo**	**Unidades**
velocidade	$\vec{v}$	$^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$
aceleração	$\vec{a}$	$^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2}$
força	$\vec{F} = m\,\vec{a}$	$1\,\mathrm{N} = 1\, ^{\mathrm{kg\,m}}/_{\mathrm{s}^2}$
energia cinética	$E = \frac{1}{2} m \vec{v}^{\,2}$	$1\,\mathrm{J} = 1\, ^{\mathrm{kg\,m}^2}/_{\mathrm{s}^2}$
trabalho	$W = F\,s$	$1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N\,m} = 1\, ^{\mathrm{kg\,m}^2}/_{\mathrm{s}^2}$

As unidades 1 kWh, 1 eV e 1 erg correspondem à grandeza física da energia.

a) $1\,\mathrm{kWh} = 1000\,\mathrm{Wh} = 1000\ W \cdot 3600\ s = 3,6\ \cdot 10^6\ Ws = 3,6\ \cdot 10^6 \frac{J}{s} s = 3,6 \cdot 10^6\ J$

Comentário

Esta unidade é por exemplo utilizado nas facturas de energia. *Exemplo de utilização*: A fonte de alimentação e o monitor de um computador têm uma potência de 500 Watts e 100 Watts, respectivamente. Quanto energia eléctrica é necessária para ter o computador a funcionar durante um mês durante 10 horas diárias?

Qual é o custo (preço actual da electricidade: $\sim 0,15\,€/\mathrm{kWh}$)?

Solução: Num mês o computador funciona durante $30 \times 10\ h = 300\ h$ correspondente à $300\ h \times 0.6\ kW = 180\ kWh$ o que corresponde à um custo de $180\,\mathrm{kWh} \times 0,15€/\mathrm{kWh} = 27\,€$ por mês.

b) $1\,\mathrm{eV} = 1,6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C} \times 1\,\mathrm{V} = 1,6 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$

Comentário

Esta unidade é por exemplo muito útil para indicar a energia de um acelerador de partículas:
Um electrão acelerado por um potencial de 1000 V tem uma energia de 1000 eV.

c) $1\,\mathrm{erg} = 1\,\mathrm{g}\,\mathrm{cm}^2\,\mathrm{s}^{-2} = (10^{-3}\,\mathrm{kg})\,(10^{-2}\,\mathrm{m})^2\,\mathrm{s}^{-2} = 10^{-7}\,\mathrm{J}$ *Nota*: erg é a unidade de energia no sistema cgs baseado nas unidades cm, g e s.

d) $900\,\mathrm{km/h} = \frac{900\times10^3\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} = 2,5 \times 10^2\,\mathrm{m/s}$

e) $50\,\mathrm{km/h} = \frac{50\times10^3\,\mathrm{m}}{3,6\cdot10^3\,\mathrm{s}} = 13,9\,\mathrm{m/s}$

1.5. Um comboio, a viajar à velocidade máxima, é sujeito a uma força de $\boxed{\text{atrito}}$ proporcional ao $\boxed{\text{quadrado da velocidade.}}$ Faça uma estimativa do factor por que é necessário aumentar a $\boxed{\text{potência}}$ da locomotiva para que se consiga $\boxed{\text{duplicar}}$ a velocidade máxima desse comboio.

Solução: É necessário aumentar a potência 8 vezes.

1.6. Na sequência da campanha de substituição de lâmpadas em curso que tem como objectivo poupar energia, os candeeiros colocados sobre as mesas de uma sala de estudo deverão ser substituídos por lâmpadas de tecto. A $\boxed{\text{potência}}$ actual das lâmpadas nos candeeiros é de 60 W e estão colocadas a uma $\boxed{\text{distância}}$ média $\boxed{D = 50\,\mathrm{cm}}$ das mesas. As novas lâmpadas do tecto serão colocadas a uma $\boxed{\text{distância}}$ média $\boxed{D_{\text{tecto}} = 3,5\,\mathrm{m.}}$ Qual a potência que deverá ter cada lâmpada do tecto para que a potência de radiação que incide sobre uma folha de papel seja $\boxed{\text{igual}}$ à potência que actualmente incide vinda de uma lâmpada do candeeiro colocado sobre a mesa? Considere que em ambos os casos a fonte de luz é uma $\boxed{\text{fonte pontual}}$ que $\boxed{\text{emite radiação uniformemente}}$ em todos os sentidos. (Note que a estimativa obtida deverá corresponder a um valor superior ao real, pois cada mesa será iluminada por mais que uma lâmpada.)

Resolução:

A questão chave para resolver o problema é saber como varia a potência luminosa, P, que incide na folha de papel com a distância entre a fonte pontual e a folha. Sabendo essa função, a razão entre as potências do candeeiro e da lâmpada do tecto será proporcional à razão entre as distâncias da folha ao candeeiro e à lâmpada do tecto.

Se imaginarmos uma esfera de raio r_1 centrada numa fonte pontual, toda a energia luminosa emitida pela fonte atravessa a superfície, S_1, dessa esfera. Se tivermos agora uma outra esfera de raio $r_2 \neq r_1$, sucede o mesmo. No entanto como a superfície da esfera é agora diferente, a energia por unidade de superfície é também diferente, sendo tanto menor quanto maior o raio.
Como a superfície de uma esfera é $S = 4\pi r^2$, a potência por unidade de superfície é $p = \frac{P}{4\pi r^2}$.

Aplicando ao nosso problema, como a potência na folha de papel tem de ser a mesma (isto é a potência por unidade de superfície), obtemos:

$$p_1 = p_2 <=> \frac{P_1}{4\pi r_1^2} = \frac{P_2}{4\pi r_2^2}$$

Se P_1 for a potência da lâmpada do tecto, P_2 a do candeeiro e r_1 e r_2 as distâncias relativas, obtemos $P_1 = 60\,\mathrm{W} \times (\frac{3{,}5}{0{,}5})^2 = 2940\,\mathrm{W}$.

Comentários:

Na resolução deste problema fizemos algumas simplificações desprezando alguns factores que, numa análise mais rigorosa teriam de ser considerados. O mais importante foi desprezar o ângulo de incidência da luz na folha de papel. Com efeito a energia que atravessa uma superfície depende do ângulo entre a direcção de incidência e a normal a essa superfície (produto interno). Assim, se incidência for perpendicular à superfície (ângulo de 0°) a energia que chega é a máxima possível mas se o ângulo for de 90°com a normal à superfície não recebe energia. Para ter este efeito em conta, no nosso problema deviamos ter considerado o ângulo de inclinação de cada fonte pontual em relação à folha.
Outro aspecto que desprezamos, e que é importante em vários domínios, são as propriedades do meio que a luz atravessa o qual pode absorver e difundir a radiação.

1.7. Quando viajar lembre-se que o funcionamento de vários sinais luminosos e de telefones SOS colocados ao longo das estradas é assegurado por painéis solares.

a) Estime qual a energia máxima que se consegue armazenar num painel solar durante uma hora se o painel tiver uma área de $50\,\text{cm} \times 50\,\text{cm}$ e na suposição que o painel tem um sistema que lhe permite assegurar a incidência da luz do Sol na perpendicular. Considere que o rendimento do painel é de 15 %, que o sistema electrónico consome pouca energia e que só 35 % da radiação incidente na atmosfera atinge a superfície da Terra. Os valores médios da luminosidade solar e da distância Terra-Sol são dados no anexo B.
Sugestão: comece por calcular a energia recebida por segundo na superfície do painel.

Solução: 6.39×10^4 J

b) (*) Suponha que o Sol teve uma luminosidade constante durante todo o período de vida estimado em 4,5 mil milhões de anos. Determine qual a quantidade de massa que o Sol perdeu por radiação durante 4,5 mil milhões de anos. Compare o valor obtido com o valor para a massa da Terra.
Nota: Recorde a equação de Einstein: $E = m\,c^2$.

Solução: $6.0 \times 10^{26}\,\mathtt{k}g \simeq 100 m_T$

1.8. Qual a distância a que corresponde 1 parsec, isto é, a que distância está uma estrela para a qual o ângulo de paralaxe é $\beta = 1''$.

Solução: 3.1×10^{16} m

1.9. A missão espacial GAIA da ESA, cujo lançamento está previsto para 2013, conseguirá medir, como boa precisão, distâncias até objectos cujo ângulo de paralaxe é $\beta = 0,0001$. A que distância corresponde este ângulo de paralaxe?

Solução: 10^4 parsec

1.10. (*) Na escala de Vega, o Sol tem uma magnitude aparente $\text{mag}_\odot = -26,5$. Recorde que na escala de Vega, a magnitude de Vega é zero.

A estrela Polar é uma supergigante amarela situada a 430 anos-luz da Terra e situa-se na constelação da Ursa-Menor, próximo do Norte celeste. A magnitude aparente da estrela Polar é $\text{mag}_{(Polar)} = 2,0$.

Por definição, a magnitude de uma estrela A é

$$\text{mag}_A = -2,5 log_{10} F_A + \text{Const} \ ,$$

onde F_A é o fluxo recebido da estrela (energia por segundo e por m^2).

a) Qual a razão entre os fluxos recebidos de Vega e da estrela Polar sabendo que, na escala de Vega, as magnitudes dessas estrelas são, respectivamente, $\text{mag}_{(Vega)} = 0$ e $\text{mag}_{(Polar)} = 2$.

Solução: $F_V/F_P \approx 6.3$

b) Qual o quantidade média de energia solar recebida na Terra, por m^2 e por segundo?

Solução: $1,4\,\mathrm{kW/m^2}$

c) Compare o valor obtido para a energia recebida do Sol, por m^2 e por segundo, com a energia que receberia da estrela polar, por m^2 e por segundo, se esta se encontrasse a uma distância semelhante à que o Sol se encontra da Terra.
Sugestão: comece por calcular a distância entre a Terra e a estrela Polar.

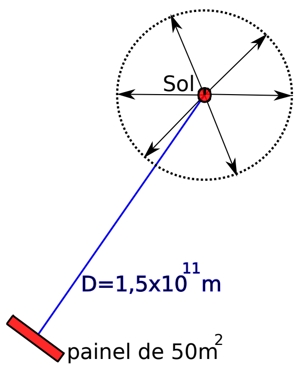
Solução: A energia recebida seria 10^{27} vezes maior.

1.11. A energia solar é usada para o abastecimento de energia a uma nave espacial.

a) Qual a quantidade de energia solar que recebe uma nave espacial durante um ano se estiver situada a uma distância do Sol semelhante à distância a que a Terra se encontra do Sol. Considere que a superfície dos painéis solares é $50\,\mathrm{m}^2$. Dê a resposta em Wh.
Sugestão: Comece por calcular a energia solar recebida por segundo (dE/dt) numa superfície de $50\,\mathrm{m}^2$ de painéis solares de uma nave espacial situada a uma distância do Sol semelhante à distância a que a Terra se encontra do Sol.

Resolução:

O Sol (aproximado por um ponto) emite a energia radialmente para o espaço com uma potência (luminosidade) $P_{irr} = \frac{dE}{dt} = 3,827 \cdot 10^{26}\ W$ (recorde que W corresponde à J/s). A intensidade (potência por área unitária) diminui com a distância ao Sol como $1/(4\pi r^2)$ ($4\pi r^2$ corresponde à área da superfície de uma esfera com raio r). A potência recebida num painel solar com área A e a uma distância r do sol é:



$$P_{rec} = \frac{A}{4\pi r^2} P_{irr}$$

No nosso caso a potência recebida é:

$$P_{rec} = \frac{50\,\mathrm{m}^2}{4\pi D^2} P_{irr} = \frac{50\,\mathrm{m}^2}{4\pi \cdot 1,5^2 \cdot 10^{22}\,\mathrm{m}^2} \cdot 3,827 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W} = 6,77 \cdot 10^4\,\mathrm{W}$$

Durante um ano a nave espacial recebe:

$$E = P_{rec} \cdot 365 \cdot 24\,\mathrm{h} = 5,9 \cdot 10^8\,\mathrm{Wh}$$

Comentários

O conceito da diminuição da intensidade duma fonte pontual de radiação é muito comum aplicando-se em vários domínios:

i. A força de atracção gravítica;
ii. A dose de radiação recebida de uma fonte radioactiva;
iii. A iluminação de um espaço com lâmpadas (ver exercício 6 desta série);
iv. A recepção do sinal WiFi de uma antena por um computador portatil.

---

b) Qual deveria passar a ser a área dos painéis solares se a nave passasse para uma distância 3 vezes superior para que continuasse a receber a mesma potência incidente do Sol? Justifique a resposta.

Resolução:

A potência recebida por um painel de área A_1 a uma distáncia D é igual à potência recebida por um painel de área A_2 a uma distáncia $3D$.

$$P_{rec1} = \frac{A_1}{4\pi D^2} P_{irr}\,, \qquad P_{rec2} = \frac{A_2}{4\pi (3D)^2} P_{irr}$$

Como $P_{rec1} = P_{rec2}$ segue-se que $A_2 = 9A_1$ ou no nosso caso $A_2 = 9 \cdot 50\,\mathrm{m}^2 = 450\,\mathrm{m}^2$.

1.12. Uma amostra com isótopo radioactivo de iodo $^{131}\mathrm{I}$, com $T_{1/2} = 8,04$, dias apresenta uma actividade de $5\,\mathrm{mCi}$ quando é produzida em Laboratório. Essa amostra é posteriormente levada para um Hospital onde fica armazenada. Antes de ser utilizada verifica-se que apresenta uma actividade de $4,2\,\mathrm{mCi}$. Quanto tempo passou desde que a amostra foi produzida até que, no Hospital, se preparam para a utilizar? Recorde que $1\,\mathrm{Ci} = 3,7 \times 10^{10}\,\mathrm{Bq} = 3,7 \times 10^{10}\,\mathrm{dec/s}$.
Sugestão: pode eventualmente começar por calcular λ, a constante de decaimento para o $^{131}\mathrm{I}$.

Resolução

- Começando por calcular a constante de decaimento, tem-se

$$\lambda = \frac{\log(2)}{T_{1/2}} = \frac{\log(2)}{8,04 \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{s}} \approx 10^{-6}\,\mathrm{s}^{-1}$$

- A lei do decaimento radioactivo

$$A(t) = A_0 \, e^{-\lambda \, t} \; ,$$

permite-nos saber a actividade ao fim de um tempo t, $A(t)$, a partir da actividade inicial, A_0, e a constante de decaimento λ. Uma vez que o que precisamos de saber é o tempo decorrido, resolvemos esta expressão em ordem a t:

$$t = -\frac{1}{\lambda} log \left(\frac{A(t)}{A_0} \right)$$

Substituindo valores, obtem-se:

$$t = -\frac{1}{10^{-6}\,\mathrm{s}^{-1}} log \left(\frac{4,2\,\mathrm{mCi}}{5\,\mathrm{mCi}} \right) = 0,174 \times 10^6 \; s = 2,02\,\mathrm{d} \; .$$

1.13. Uma amostra de de madeira carbonizada com 25 g apresenta uma actividade de 250 desintegrações por minuto. Qual a idade da amostra? Sabe-se que $\mathrm{T}_{1/2} = 5730$ anos e que na matéria vegetal viva $^{14}\mathrm{C}/^{12}\mathrm{C} = 1,3 \times 10^{-12}$. Comece por calcular a constante de decaimento, λ, a quantidade de $^{14}\mathrm{C}$ que existiam inicialmente nos 25 g de madeira carbonizada, e a actividade da amostra quando foi carbonizada.

Resolução

A lei do decaimento radioactivo diz-nos que, se partirmos de N_0 átomos iniciais, o número de átomos que restam ao fim de um tempo t é dado por

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \; .$$

Assim para determinar a idade da amostra temos de conhecer o número de átomos de $^{14}\mathrm{C}$ na amostra no instante actual, $N(t)$, o seu número inicial, N_0 e a constante de decaimento.

- Quanto a esta última, podemos calcula-la a partir do valor do período de semi-desintegração indicado:

$$\lambda_{[^{14}\mathrm{C}]} = \frac{\log(2)}{T_{1/2}} = 1,21 \times 10^{-4} \, \mathrm{ano}^{-1}$$

- A partir deste valor e do valor indicado da actividade da amostra podemos saber o número de átomos de $^{14}\mathrm{C}$ que ainda existem na amostra. Com efeito sabemos que a actividade (número de desintegrações por unidade de tempo) é dada por:

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N \, .$$

Como $A = 250\,\text{min}^{-1} = 250/60\,\text{s}^{-1} \simeq 4,17\,\text{Bq}$, convertendo a constante de decaimento para segundos e substituindo valores, obtemos $N_{[^{14}\text{C}]} = 1,09 \times 10^{12}$.

- Devemos agora calcular quantos átomos de ^{14}C existiam na madeira enquanto a árvore estava viva:
  Admitamos que toda a massa da amostra, $m = 25\,\text{g}$, de madeira carbonizada corresponde às duas formas de carbono. Assim temos $m_{[^{12}\text{C}]} + m_{[^{14}\text{C}]} = 25\,\text{g}$. No entanto, uma vez que a razão $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$ é um número muito pequeno e as massas de cada um dos isótopos são muito próximas, podemos desprezar a massa $m_{[^{14}\text{C}]}$ e tomar $m_{[^{12}\text{C}]} \approx 25\,\text{g}$. Usando a massa molar deste isótopo ($12\,\text{g}\,\text{mol}^{-1}$) e a constante de Avogadro (apêndice B), obtemos o número de átomos de ^{12}C da amostra:

  $$N_{[^{12}\text{C}]} = \frac{25\,\text{g}}{12\,\text{g}\,\text{mol}^{-1}}\,6,022 \times 10^{23}\,\text{mol}^{-1} = 1,25 \times 10^{24}$$

  A partir deste valor, usando a razão $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$, obtemos o número inicial de átomos de ^{14}C,

  $$N_{0[^{14}\text{C}]} = N_{[^{12}\text{C}]} \cdot 1,3 \times 10^{-12} = 1,63 \times 10^{12}$$

- Por fim, usando a lei de decaimento e o número de átomos de ^{14}C, podemos escrever:

  $$t = \lambda^{-1} \log\left(\frac{N_0}{N}\right) ,$$

  onde o logaritmo usado é o logaritmo Neperiano (*Nota*: não confundir com o logaritmo decimal!). Substituindo os valores calculados anteriormente, obtemos $t = 3330$ anos.

Comentários

Em rigor deveriamos ter considerado também a presenca do isótopo ^{13}C, estável, que, no material biológico representa 2% do ^{12}C presente. Assim, no passo 3 deveriamos ter considerado $m_{[^{12}\text{C}]} + m_{[^{13}\text{C}]} \approx 25\,\text{g}$ ou, $m_{[^{12}\text{C}]}(1 + 0,02) \approx 25\,\text{g}$ chegando ao valor $N_{[^{12}\text{C}]} = 1,23 \times 10^{24}$, o que nos levaria a corrigir a estimativa da idade da amostra para 3167 anos.

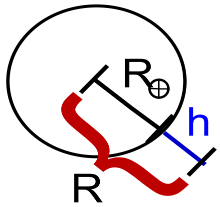
Leis do tipo exponential como a do decaimento radioactivo são frequentes na descrição de muitos fenómenos: a transferência de calor entre um corpo e o meio envolvente; a carga (e descarga) de um condensador; reacções químicas cuja taxa de reacção dependa só da concentração de um reagente; etc. Os exemplos não se limitam só às ciências naturais encontrando aplicação nas ciências sociais, informática e economia, entre outras.

1.14. A energia potencial gravítica de um corpo de massa m à superfície da Terra é geralmente dada por $E_p = mgh$, onde h é a altura sobre a superfície da Terra a que se encontra o corpo de massa m e $g = 9,8\,\mathrm{m}/\mathrm{s}^2$. Por outro lado, a energia potencial gravítica de um corpo de massa m a uma distância R do centro da Terra, sendo R maior que o raio da Terra, é dada por

$$E_p = -G\frac{M_\oplus m}{R}\ ,$$

onde G é a constante de Newton e $M_\oplus$ a massa da Terra.

a) Explique por que motivo para $R = R_\oplus + h$ e $h << R_\oplus$ se podem usar as duas expressões para energia potencial de um corpo de massa m próximo da superfície da Terra.
Sugestão: ver Apêndice B.



Resolução:

$E_P = m\,g\,h$ corresponde à energia potencial assumindo a superfície da terra como ponto de referência ($E_P = 0$ para $h = 0$). Logo $m\,g\,h$ corresponde à diferença dos potenciais às distância $R_\oplus + h$ e $R_\oplus$:

$$\begin{aligned}
m\,g\,h &= E_P(R_\oplus + h) - E_P(R_\oplus)\\
&= -\frac{G\,M_\oplus\,m}{R_\oplus + h} - \left[-\frac{G\,M_\oplus\,m}{R_\oplus}\right]\\
&= G\,M_\oplus\,m\left[\frac{1}{R_\oplus} - \frac{1}{R_\oplus + h}\right]\\
&= G\frac{M_\oplus m}{R_\oplus}\left[1 - \frac{R_\oplus}{R_\oplus + h}\right]\\
&= G\frac{M_\oplus m}{R_\oplus}\left[\frac{R_\oplus + h - R_\oplus}{R_\oplus + h}\right]\\
&= G\frac{M_\oplus m}{R_\oplus}\frac{h}{R_\oplus + h}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ como $h \ll R_\oplus$, segue-se que $R_\oplus + h \sim R_\oplus$

$$\Rightarrow m\,g\,h = \frac{G\,M_\oplus}{R_\oplus^2}\,m\,h$$

---

b) Calcule a expressão para g – a aceleração gravítica à superfície da Terra – em função de G, $R_\oplus$ e $M_\oplus$.

Resolução:

Do resultado anterior, tiramos:

$$\Rightarrow g = \frac{G\,M_\oplus}{R_\oplus^2}$$

1.15. Numa situação semelhante à da alínea anterior,

a) explique por que motivo para $R = R_\oplus + h$ e $h << R_\oplus$ se podem utilizar as seguintes duas expressões para a força gravítica que actua num corpo de massa m:

$$F = mg \;\text{ e }\; F = G\frac{M_\oplus m}{R^2} \; .$$

Resolução:

Uma vez que

$$F = \frac{G\, M_\oplus\, m}{R^2}$$

com $R = R_\oplus + h$ segue-se

$$\begin{aligned} F &= \frac{G\, M_\oplus\, m}{(R_\oplus + h)^2} \\ &= \frac{G\, M_\oplus\, m}{{R_\oplus}^2 \left(1 + \frac{h}{R_\oplus}\right)^2} \\ &= \frac{G\, M_\oplus\, m}{{R_\oplus}^2}\left(1 + \frac{h}{R_\oplus}\right)^{-2} \end{aligned}$$

Considerando $h/R_\oplus \ll 1$ e a aproximação de Taylor $(1+x)^a \approx 1 + a\,x$ (ver Apéndice A.4) é válido:

$$F \approx \frac{G\, M_\oplus}{{R_\oplus}^2}\, m \left(1 - \frac{2h}{R_\oplus}\right)$$

Comparando esta expressão com $F = m\,g$ e assumindo $h = 0$ podemos verificar que:

$$g = \frac{G\, M_\oplus}{{R_\oplus}^2}$$

Logo:

$$F = m\,g\left(1 - \frac{2h}{R_\oplus}\right)$$

---

b) Para testar a validade do que acabou de demonstrar, usando ambas as expressões para a força gravítica à superfície da Terra, calcule e compare os valores para a aceleração gravítica que actua em m se $h = 10\,\text{m}$. E se $h = 320\,\text{km}$?

Resolução:

Usando o valor a anterior,

$$a = \frac{G\,M_\oplus}{(R_\oplus + h)^2}$$

Com $h = 10\,\mathrm{m}$ tem-se:

$$a = \frac{6,67 \times 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2\ kg^{-2}} \cdot 6 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}}{(6400 \times 10^3\,\mathrm{m} + 10\,\mathrm{m})^2} = 9,77\,{}^{\mathrm{m}}\!/\!{}_{\mathrm{s^2}}$$

Com $h = 320\ km$ tem-se:

$$a = \frac{6,67 \times 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2\ kg^{-2}} \cdot 6 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}}{(6400 \times 10^3\,\mathrm{m} + 320 \times 10^3\,\mathrm{m})^2} = 8,86\,{}^{\mathrm{m}}\!/\!{}_{\mathrm{s^2}}$$

A aceleração gravítica a uma distância h da terra é dado por

$$a = \left(1 - \frac{2h}{R_\oplus}\right) g$$

Com $h = 10\,\mathrm{m}$ tem-se:

$$a = \left(1 - \frac{2 \cdot 10\,\mathrm{m}}{6400 \cdot 10^3\,\mathrm{m}}\right) g = 0,999997\,g$$

Com $h = 320\,\mathrm{km}$ tem-se:

$$a = \left(1 - \frac{2 \cdot 320\,\mathrm{km}}{6400\,\mathrm{km}}\right) g = 0,9\,g$$

Comentários

Este exercício mostra que a imponderabilidade que os astronautas sentem nas estações espaciais não tem nada a ver com a "falta" de gravidade uma vez que à distância típica das estações (de 320 km) da terra a aceleração gravítica ainda corresponde a 90 % da aceleração gravítica sentida na superfície da terra.