DF
DEPARTAMENTO
DE FÍSICA
TÉCNICO LISBOA

Mecânica e Ondas — LEGM e LEIC-A

Séries de Exercícios

Enunciados

Equipa de Docentes: Ana Maria Mourão (Coordenadora),
Nuno Pinhão e Katharina Lorenz

Ano Lectivo: 2012/2013, 2º semestre

Alguns exercícios são seleccionados a partir da Bibliografia ou de exames de anos anteriores. Nesta compilação colaboraram Eduardo V. de Castro e Jordi Casanellas.

Introdução

A resolução de problemas, seja em Física ou em qualquer outro domínio, é facilitada se forem seguidas algumas regras que ajudam na sua analise e a encontrar a sua solução. Esta deve passar por três fases: uma de análise do problema, a resolução propriamente dita e uma de verificação.

Nota: Das regras a seguir indicadas, nem todas se aplicam a todo o tipo de problemas devendo ser vistas como conselhos de ordem geral.

Análise: Comece por certificar-se que entende o problema. Se tiver dúvidas experimente sublinhar palavras-chave que o definem, identificam o seu tipo e as grandezas envolvidas. Faça um esquema do sistema físico descrito. Identifique as grandezas por um símbolo. Veja se o problema é do mesmo tipo de um problema que já conheça; se for a estratégia de solução deve ser semelhante.

Pense na situação descrita: imagine o que se passa e preveja, qual será o resultado, (pelo menos qualitativo). Se tiver dúvidas na sua análise, discuta com um colega;

Resolução: Liste as grandezas e valores de entrada, as grandezas a calcular e os valores de alguma constante que necessite. Estabeleça as relações entre as grandezas por forma a definir as relações físicas entre as grandezas a calcular e as fornecidas. Se a resposta pretendida for um valor numérico, só então passe à substituição de valores;

Verificação: Pense no resultado que obteve. Era o que estava à espera? É consistente com outros problemas semelhantes? O que sucederia se variasse os valor de entrada? Analisar situações limite (massa infinita, tempo infinito, etc.)

1. Grandezas, unidades e medições de grandezas em Física

1.1. Usando análise dimensional determine a dependência do período de um pêndulo gravítico em função do comprimento do fio e da aceleração gravítica.

1.2. Usando análise dimensional, demonstre que a distância percorrida por um corpo que se desloca num movimento de translação com aceleração constante a uma dimensão depende da posição inicial, x_o, da velocidade inicial, v_o, do valor da aceleração, a, e do instante t da seguinte forma:

$$x(t) - x_o = c_1 v_o t + c_2 a t^2 \ ,$$

onde c_1 e c_2 são constantes adimensionais.

1.3. Para o problema anterior, demonstre que as constantes c_1 e c_2 têm como valores $c_1 = 1$ e $c_2 = \frac{1}{2}$. Isto é,

$$x(t) - x_o = v_o t + \frac{1}{2} a t^2 \ .$$

1.4. A que corresponde, em unidades do sistema internacional: $1\,\mathrm{kWh}$, $1\,\mathrm{eV}$, $900\,{}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{h}}$, $50\,{}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{h}}$ e $1\,\mathrm{erg}$?

1.5. Um comboio, a viajar à velocidade máxima, é sujeito a uma força de atrito proporcional ao quadrado da velocidade. Faça uma estimativa do factor por que é necessário aumentar a potência da locomotiva para que se consiga duplicar a velocidade máxima desse comboio.

1.6. Na sequência da campanha de substituição de lâmpadas em curso que tem como objectivo poupar energia, os candeeiros colocados sobre as mesas de uma sala de estudo deverão ser substituídos por lâmpadas de tecto. A potência actual das lâmpadas nos candeeiros é de $60\,\mathrm{W}$ e estão colocadas a uma distância média $D = 50\,\mathrm{cm}$ das mesas. As novas lâmpadas do tecto serão colocadas a uma distância média $D_{\mathrm{tecto}} = 3,5\,\mathrm{m}$. Qual a potência que deverá ter cada lâmpada do tecto para que a potência de radiação que incide sobre uma folha de papel seja igual à potência que actualmente incide vinda de uma lâmpada do candeeiro colocado sobre a mesa? Considere que em ambos os casos a fonte de luz é uma fonte pontual que emite radiação uniformemente em todos os sentidos. (Note que a estimativa obtida deverá corresponder a um valor superior ao real, pois cada mesa será iluminada por mais que uma lâmpada.)

1.7. Quando viajar lembre-se que o funcionamento de vários sinais luminosos e de telefones SOS colocados ao longo das estradas é assegurado por painéis solares.

   a) Estime qual a energia máxima que se consegue armazenar num painel solar durante uma hora se o painel tiver uma área de $50\,\mathrm{cm} \times 50\,\mathrm{cm}$ e na suposição que o painel tem um sistema que lhe permite assegurar a incidência da luz do Sol na perpendicular. Considere que o rendimento do painel é de $15\,\%$, que o sistema electrónico consome pouca energia e que só $35\,\%$ da radiação incidente na atmosfera atinge a superfície da Terra. Os valores médios da luminosidade solar e da distância Terra-Sol são dados no anexo **??**.
   Sugestão: comece por calcular a energia recebida por segundo na superfície do painel.

   b) (*) Suponha que o Sol teve uma luminosidade constante durante todo o período de vida estimado em 4,5 mil milhões de anos. Determine qual a quantidade de massa que o Sol perdeu por radiação durante 4,5 mil milhões de anos. Compare o valor obtido com o valor para a massa da Terra.
   Nota: Recorde a equação de Einstein: $E = m\,c^2$.

1.8. Qual a distância a que corresponde 1 parsec, isto é, a que distância está uma estrela para a qual o ângulo de paralaxe é $\beta = 1''$.

1.9. A missão espacial GAIA da ESA, cujo lançamento está previsto para 2013, conseguirá medir, como boa precisão, distâncias até objectos cujo ângulo de paralaxe é $\beta = 0,0001$. A que distância corresponde este ângulo de paralaxe?

1.10. (*) Na escala de Vega, o Sol tem uma magnitude aparente $\mathrm{mag}_{\odot} = -26,5$. Recorde que na escala de Vega, a magnitude de Vega é zero.

   A estrela Polar é uma supergigante amarela situada a 430 anos-luz da Terra e situa-se na constelação da Ursa-Menor, próximo do Norte celeste. A magnitude aparente da estrela Polar é $\mathrm{mag}_{(Polar)} = 2,0$.

   Por definição, a magnitude de uma estrela A é

$$\mathrm{mag}_A = -2,5log_{10}F_A + \mathrm{Const}\ ,$$

   onde F_A é o fluxo recebido da estrela (energia por segundo e por m^2).

   a) Qual a razão entre os fluxos recebidos de Vega e da estrela Polar sabendo que, na escala de Vega, as magnitudes dessas estrelas são, respectivamente, $\mathrm{mag}_{(Vega)} = 0$ e $\mathrm{mag}_{(Polar)} = 2$.

   b) Qual o quantidade média de energia solar recebida na Terra, por m^2 e por segundo?

c) Compare o valor obtido para a energia recebida do Sol, por m^2 e por segundo, com a energia que receberia da estrela polar, por m^2 e por segundo, se esta se encontrasse a uma distância semelhante à que o Sol se encontra da Terra.
Sugestão: comece por calcular a distância entre a Terra e a estrela Polar.

1.11. A energia solar é usada para o abastecimento de energia a uma nave espacial.

a) Qual a quantidade de energia solar que recebe uma nave espacial durante um ano se estiver situada a uma distância do Sol semelhante à distância a que a Terra se encontra do Sol. Considere que a superfície dos painéis solares é $50\,\mathrm{m}^2$. Dê a resposta em Wh.
Sugestão: Comece por calcular a energia solar recebida por segundo (dE/dt) numa superfície de $50\,\mathrm{m}^2$ de painéis solares de uma nave espacial situada a uma distância do Sol semelhante à distância a que a Terra se encontra do Sol.

b) Qual deveria passar a ser a área dos painéis solares se a nave passasse para uma distância 3 vezes superior para que continuasse a receber a mesma potência incidente do Sol? Justifique a resposta.

1.12. Uma amostra com isótopo radioactivo de iodo ^{131}I, com $T_{1/2} = 8,04$, dias apresenta uma radioactividade de $5\,\mathrm{mCi}$ quando é produzida em Laboratório. Essa amostra é posteriormente levada para um Hospital onde fica armazenada. Antes de ser utilizada verifica-se que apresenta uma radioactividade de $4,2\,\mathrm{mCi}$. Quanto tempo passou desde que a amostra foi produzida até que, no Hospital, se preparam para a utilizar? Recorde que $1\,\mathrm{Ci} = 3,7\times10^{10}\,\mathrm{Bq} = 3,7\times10^{10}\,\mathrm{dec/s}$.
Sugestão: pode eventualmente começar por calcular λ, a constante de decaimento para o ^{131}I.

1.13. Uma amostra de madeira carbonizada apresenta uma radioactividade de 250 desintegrações por minuto. Qual a idade da amostra?
Sabe-se que $\mathrm{T}_{1/2} = 5730$ anos e na matéria vegetal viva $^{14}\mathrm{C}/^{12}\mathrm{C}= 1,3\times10^{-12}$. Comece por calcular a quantidade de ^{14}C que existiam inicialmente nos $25\,\mathrm{g}$ de madeira carbonizada, a constante de decaimento, λ, e a radioactividade da amostra quando foi carbonizada.

1.14. A energia potencial gravítica de um corpo de massa m à superfície da Terra é geralmente dada por $E_p = mgh$, onde h é a altura sobre a superfície da Terra a que se encontra o corpo de massa m e $g = 9,8\,\mathrm{m/s^2}$. Por outro lado, a energia potencial gravítica de um corpo de massa m a uma distância R do centro da Terra, sendo R maior que o raio da Terra, é dada por

$$E_p = -G\frac{M_\oplus m}{R} \ ,$$

onde G é a constante de Newton e $M_\oplus$ a massa da Terra.

a) Explique por que motivo para $R = R_\oplus + h$ e $h << R_\oplus$ se podem usar as duas expressões para energia potencial de um corpo de massa m próximo da superfície da Terra.
Sugestão: ver Apêndice **??**.

b) Calcule a expressão para g – a aceleração gravítica à superfície da Terra – em função de G, $R_\oplus$ e $M_\oplus$.

1.15. Numa situação semelhante à da alínea anterior,

a) explique por que motivo para $R = R_\oplus + h$ e $h << R_\oplus$ se podem utilizar as seguintes duas expressões para a força gravítica que actua num corpo de massa m:

$$F = mg \text{ e } F = G\frac{M_\oplus m}{R^2} \ .$$

b) Para testar a validade do que acabou de demonstrar, usando ambas as expressões para a força gravítica à superfície da Terra, calcule e compare os valores para a aceleração gravítica que actua em m se $h = 10\,\mathrm{m}$. E se $h = 320\,\mathrm{km}$?

A. Revisão de conceitos de matemática

A.1. Considere os seguintes vectores:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= a_x\,\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z\\ \vec{b} &= b_x\,\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y + b_z\vec{e}_z\\ \vec{c} &= c_x\,\vec{e}_x + c_y\vec{e}_y + c_z\vec{e}_z\end{aligned}$$

a) Determine a expressão geral para c, correspondente ao produto interno $c = \vec{a}\cdot\vec{b}$

b) Determine a expressão geral para $\vec{d} = \vec{a}\times\vec{b}$
Calcule o módulo de $\vec{d}$.

c) Demonstre que $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$

d) Considere os vectores $\vec{\omega}$ e $\vec{r}$, respectivamente velocidade angular e vector posição de um ponto material, tais que $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$ e $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$.
Calcule a direcção, sentido e módulo do vector velocidade do ponto material definida como $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$

e) Considere os vectores $\vec{\omega}$ e $\vec{r}$, respectivamente velocidade angular e vector posição de um ponto material, tais que $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$ e $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$.
Calcule a direcção, sentido e módulo do vector definido como

$$\vec{a} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

f) Escolha e represente um sistema de eixos (x, y, z). Calcule e represente $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$, indicando o módulo e o sentido de $\vec{c}$, nos seguintes casos:

i. $\vec{a} = 5\,\vec{e}_x$ e $\vec{b} = 7\,\vec{e}_y$

ii. $\vec{a} = 5\,\vec{e}_y$ e $\vec{b} = 7\,\vec{e}_z$

iii. $\vec{a} = 5\,\vec{e}_z$ e $\vec{b} = 7\,\vec{e}_x$

iv. $\vec{a} = 5\,\vec{e}_z$ e $\vec{b} = 7\,\vec{e}_y$

A.2. Considere as seguintes funções e calcule as derivadas solicitadas.

a) Seja $f(x) = 3x^2 + 11$.
Obtenha a expressão para $\dot{f}(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ e analise o significado da derivada da função num ponto. Calcule $\dot{f}(7)$.

b) Para a função anterior, obtenha a expressão para $\ddot{f}(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$ e calcule $\ddot{f}(7)$.

c) Seja $x(t) = 8 + 13t + 4,9t^2$
Calcule $\dot{x}$ para $t = 3$. Calcule $\ddot{x}$ para $t = 3$.

d) Seja $f(x) = 4x^3 + 11x^3y + 7x^2 + 5$. Calcule:

i. $F_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$

ii. $F_y(x,y) = \frac{\mathrm{d} f(x,y)}{dy}$

iii. $F_{xy} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$

iv. $F_{xy} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$

e) Calcule $\dot{f}(x)$ nos casos em que

i. $f(x) = \sin(x)$

ii. $f(x) = \cos(x)$

iii. $f(x) = \ln(x)$

iv. $f(x) = \sin(x^2)$

v. $f(x) = \tan(x)$

A.3. Calcule

a) $\int a\, \mathrm{d}t$; $v(t) = \int 9,8\, \mathrm{d}t$

b) $\int 5t\, \mathrm{d}t$

c) $\int_5^{20} 5t\, \mathrm{d}t$

d) $\int t^4\, \mathrm{d}t$

e) $\int t^m\, \mathrm{d}t$

f) $\int \left(\frac{C}{x}\right)\, \mathrm{d}x$

g) $\int \left(-\frac{C}{r^2}\right)\, \mathrm{d}r$

h) Usando as definições acima para F_x , F_y e F_{xy} verifique que

i. $\int F_x(x,y)\, \mathrm{d}x = f(x,y) + Constante$

ii. $\int F_y(x,y)\, \mathrm{d}y = f(x,y) + Constante$

A.4. Considere que para $x \ll 1$ é válida a aproximação $(1+x)^a = 1 + ax$. Calcule e compare os valor exacto e o valor aproximado das seguintes expressões:

a) $(1+x)^2$ para $x = 0$ e para $x = 0,001$;

b) $(1+x)^{-1}$ para $x = 0$ e para $x = 0,001$.