6 Corpo Rígido

6.1. Determine o momento de inércia de uma régua de comprimento L e densidade uniforme nas seguintes situações:

a) em relação ao eixo que passa pelo centro e é perpendicular ao plano da régua;

Resolução:

Como se sabe o momento de inércia em relação a um eixo obtém-se do integral, estendido a todo o corpo, $I = \int_V r^2 dm$ onde r é a distância de cada ponto de massa dm a esse eixo. No nosso caso consideramos uma régua ideal, sem espessura nem largura por forma a poder considerar só uma dimensão, o seu comprimento, x. Assim podemos escrever $I = \int_{x_1}^{x_2} x^2 dm$, onde x_1 e x_2 são os valores das distâncias das extremidades da régua ao eixo.
Em relação ao eixo indicado essas distâncias são $x_1 = -\frac{L}{2}$ e $x_2 = \frac{L}{2}$ e o momento linear é calculado a partir de

$$I = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dm \,.$$

Por outro lado, como a régua tem uma densidade linear constante, podemos escrever $dm = \lambda dx$ onde λ é a densidade linear. Substituindo este valor tem-se

$$I = \lambda \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx$$

Integrando, obtemos o valor $I = \frac{ML^2}{12}$, onde $M = \lambda L$ é a massa total da régua.

---

b) em relação a um eixo que passa por uma das extremidades e é perpendicular ao plano da régua.

Resolução:

A diferença em relação ao caso anterior é nos limites de integração. Neste caso temos $x_1 = 0$ e $x_2 = L$ e o momento linear é dado por

$$I = \int_0^L x^2 dm \,.$$

Um cálculo idêntico ao anterior conduz-nos ao resultado $I = \frac{ML^2}{3}$. Note que agora o momento linear é maior.

---

c) Relacione as duas respostas obtidas anteriormente.

6.2. Determine o momento de inércia de um anel uniforme de massa M em relação ao eixo que passa pelo centro e é perpendicular ao plano do anel.

a) Comece por considerar que a secção do anel é suficientemente pequena para poder aproximar o anel a uma circunferência de raio R.

Resolução:

Como consideramos o anel suficientemente fino para ter um raio R constante, podemos escrever a massa dm de uma secção elementar do anel, ds, como $dm = \lambda ds$, onde λ é a densidade linear do anel. Sendo o anel circular, $ds = Rd\theta$. Por sua vez a massa total do anel será,

$$M = \int dm = \lambda \int ds = \lambda R \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\lambda R\,.$$

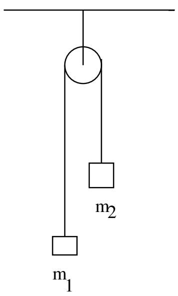
O momento de inércia virá

$$I = \int R^2 dm = \lambda R^3 \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\lambda R^3 = MR^2$$

---

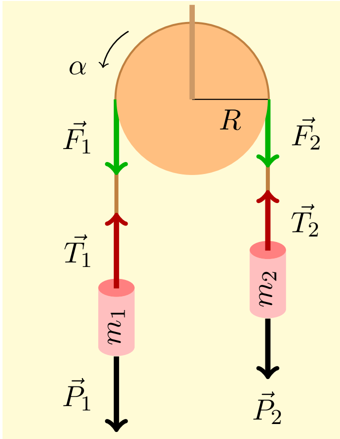
b) Considere agora que o anel tem um raio interno R_i e raio externo R_e.
R: $I = M\left(R_e^2 + R_i^2\right)/2$

6.3. Determine o momento de inércia de um disco uniforme de raio R e massa M em relação ao eixo que passa pelo centro e é perpendicular ao plano do disco. Compare o resultado obtido com o resultado obtido nos dois exercícios anteriores.
R: $I = MR^2/2$



6.4. Considere o sistema representado por uma roldana e duas massas. As duas massas m_1 e m_2 estão ligadas entre si por uma corda que passa pela roldana, como se vê na figura ao lado. A roldana pode ser aproximada por um disco de massa $m_r = 600\,\text{g}$ e raio $R = 2\,\text{cm}$.

a) Quais as expressões para a aceleração com que se deslocam as massas m_1 e m_2? Compare com o resultado obtido no problema 3.6.



Resolução:

Este problema é idêntico ao 3.6 já resolvido e parte da discussão aí feita aplica-se a este caso. A diferença reside agora na consideração do papel da roldana. Com efeito ao rodar, a roldana tem momento angular. A acção conjunta das duas forças $\vec{F}_i$ que se exercem em cada lado da roldana (cada uma de módulo igual à tensão exercida pela corda na massa respectiva), se não se equilibrarem, determinam a variação desse momento angular, isto é uma aceleração angular, α.

Retomando as equações do problema 3.6 mas considerando agora que T_1 e T_2 não são iguais ao contrário do que acontecia nesse problema, podemos escrever

$$T_1 - m_1 g = m_1 a_1 \quad (6.1)$$
$$T_2 - m_2 g = -m_2 a_1 \quad (6.2)$$

onde incluimos já o facto da aceleração de ambas as massas ter o mesmo módulo mas sentidos opostos. Por outro lado, o efeito das forças $\vec{F}_i$ é

$$RF_1 - RF_2 = I\alpha \quad (6.3)$$

onde I é o momento de inércia. Se atendermos a que $\vec{F}_i = -\vec{T}_i$, precisamos só relacionar a aceleração a_1 com a aceleração angular α para podermos obter o valor de a_1. Para isso consideremos uma pequena variação, ds, da corda na roldana quando esta gira de um ângulo $d\phi$. Tem-se $ds = Rd\phi$, o que implica que $a_1 = R\alpha$. Subtraindo (6.1) de (6.2), usando (6.3) e as relações acima, obtem-se

$$\frac{I}{R^2} a_1 + (m_1 - m_2) g = -(m_1 + m_2) a_1$$

usando o valor do momento de inércia para um disco em relação a um eixo central encontrado no problema 6.3 obtemos

$$a_1 = -\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + m_r/2} g\,, \quad a_2 = -a_1$$

Comparando com os resultados do problema 3.6 vemos que a aceleração é menor devido à massa da roldana e à variação do seu momento angular.

---

b) Qual a aceleração angular da roldana?

Resultado:

Da alínea anterior e da relação $a_1 = R\alpha$ vem

$$\alpha = -\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + m_r/2} \frac{g}{R}$$

c) Qual a relação entre as massas para que o sistema esteja em equilíbrio?

Resultado:

As massas têm de ser iguais: $m_1 = m_2$

d) Considere $m_1 = 200\,\text{g}$ e $m_2 = 100\,\text{g}$. Calcule o valor das acelerações a_1 e a_2. Compare com a aceleração da gravidade.

Resultado:

Substituindo valores, obtemos:

$$a_1 = -\frac{1}{6}g\,, \quad a_2 = \frac{1}{6}g$$

6.5. (*) Duas massas m_1 e m_2 estão ligadas por cordas a um sistema composto por dois discos uniformes colados entre si, sendo que os centros dos discos se sobrepoem. Os discos têm raios diferentes. A massa m_1 está presa a uma corda enrolada no disco de maior raio, r_1. A massa m_2 está presa a uma corda enrolada no disco de menor raio, r_2. Considere, para resolução do enunciado, que a massa m_1 sobe e m_2 desce.

a) Qual a relação entre um deslocamento de m_1 e o ângulo de rotação dos discos?

b) Qual a relação entre um deslocamento de m_2 e o ângulo de rotação dos discos?

c) Qual a relação entre a aceleração de m_2 e a aceleração angular dos discos? E para m_2?

d) Qual a relação entre a aceleração de m_2 e a aceleração de m_1?

e) Calcule a expressão para a aceleração da massa m_1. E da massa m_2.

f) Qual a relação que deverão ter as massas m_1 e m_2 para que o sistema esteja em equilíbrio?

g) Considere e analise os seguintes casos limite: 1) $m_2 = 0$; 2) $I = 0$; 3) $r_2 = 0$; 4) $r_1 = r_2$. Compare com situações já analisadas anteriormente.

6.6. Um disco e um anel rodam sem deslizar por um plano inclinado, partindo ambos de uma altura h. Considere as massas do anel e do disco iguais e $m = 200\,\text{g}$, e os raios do anel e do disco iguais a $r = 10\,\text{cm}$. O plano inclinado faz um ângulo de 15° com a horizontal.

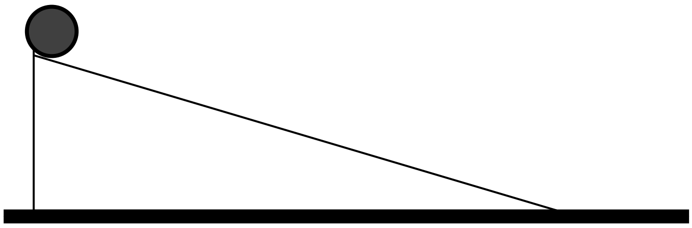


Figura 6.1: Disco em plano inclinado

a) Quais as forças que actuam no anel durante o movimento ao longo do plano? E no disco?

Resolução:

Actuam a atração gravítica e a força de atrito.

---

b) Calcule os momentos de inércia do disco e do anel relativamente ao ponto que passa no centro de cada um e é perpendicular ao plano de rotação.

Resposta:

Estes momentos foram já calculados nos exercícios 6.3 e 6.2:

$$I_{disco} = \frac{mr^2}{2} \quad \text{e} \quad I_{anel} = mr^2$$

---

c) Calcule a energia cinética de translação e a energia cinética de rotação do anel e do disco quando se deslocaram 2 metros ao longo do plano inclinado.

Resolução:

Ambos têm uma energia inicial de $E = mgh$. Ao rolarem ao longo do plano essa energia é convertida em energia cinética de translação do centro de massa, E_T, e cinética de rotação, E_R. Assim, quando a sua altura passou para $(h-y)$ a lei da conservação da energia permite-nos escrever

$$\begin{aligned} mg(h-y) &= E_T + E_R \\ &= \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + I\frac{\omega^2}{2} \end{aligned}$$

Como $v_{CM} = \omega r$, podemos escrever

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)v_{CM}^2 = g(h-y)$$

Por sua vez a distância percorrida ao longo do plano inclinado é $L = (h-y)/\sin\theta$. Substituindo na equação anterior e resolvendo em ordem a v_{CM} obtemos

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{2gL\sin\theta}{1+\frac{I}{mr^2}}}$$

Usando este valor as expressões para as energias cinética de translação e de rotação vêm

$$E_T = \frac{mgL\sin\theta}{1+\frac{I}{mr^2}} \quad \text{e} \quad E_R = \frac{mgL\sin\theta}{\frac{mr^2}{I}+1}$$

Dividindo ambas as energias pelo factor comum ($mgL\sin\theta$) e usando as definições dos momentos de inércia calculados na alínea anterior, podemos comparar esses valores para o disco e o anel:

	I	$E_T/(mgL\sin\theta)$	$E_C/(mgL\sin\theta)$
Disco	$mr^2/2$	2/3	1/3
Anel	mr^2	1/2	1/2

Usando os valores indicados, para $L = 2\,\text{m}$, obtemos $E_{T,\text{disco}} = 0,676\,\text{J}$; $E_{R,\text{disco}} = 0,338\,\text{J}$; $E_{T,\text{anel}} = E_{R,\text{anel}} = 0,507\,\text{J}$.

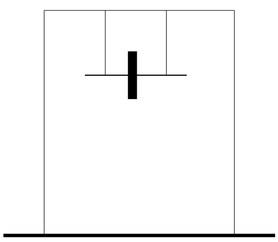
---

d) Qual dos dois (anel ou disco) chega primeiro ao fim do plano inclinado? Justifique.

Resolução:

É o disco que chega primeiro uma vez que, como se pode ver da tabela acima, 2/3 da energia potencial é transformada em energia cinética de translação enquanto que para o anel a energia potencal é distribuída em partes iguais nas duas formas de energia cinética.

6.7. Um Super iô-iô, como o representado na figura ao lado, que até lança faíscas vermelhas e verdes, enrola-se e desenrola-se preso em dois fios. O iô-iô tem um disco central, densidade uniforme, com 1 kg e raio $R = 10\,\text{cm}$. O raio do eixo de rotação é 0,25 cm.



a) Calcule a aceleração do iô-iô e a tensão nos fios quando está a desenrolar. Apresente a expressão para ambas as grandezas, antes de calcular os valores. Considere que o disco tem densidade constante. A corda que desenrola tem 50 cm de comprimento.
R: $a = \frac{1}{1+\frac{R^2}{2r^2}}g = 0,011\,\text{m/s}^2$,
$T = m(a-g) = -\frac{1}{1+2\frac{r^2}{R^2}}mg = -9,80\,\text{N}$

b) Calcule a velocidade máxima atingida pelo iô-iô.
R: $v = \sqrt{2al} = 0,11\,\mathrm{m/s}$

c) Qual a tensão máxima nos fios, atingida quando o iô-iô deixa de desenrolar para passar a enrolar?
R: $T = -mg = -9,81\,\mathrm{N}$

6.8. Uma massa $m_\mathrm{A} = 300\,\mathrm{g}$ está ligada por uma corda a um corpo B, de massa m_B, que pode girar em torno de um eixo de rotação. Pretende-se calcular o momento de inércia de B relativamente a esse eixo.
O momento de inércia de B pode ser facilmente calculado relativamente ao eixo horizontal, e portanto perpendicular à direcção do movimento de A em queda. A corda que suspende A está enrolada a uma distância $r = 5\,\mathrm{cm}$ do eixo de rotação.

a) Qual a relação entre um deslocamento de A em queda e o ângulo de rotação de B?

Resolução:

Tal como fizemos no exercício 6.4 podemos relacionar o deslocamento elementar da corda, ds, com o ângulo de rotação: $ds = rd\theta$ e obter para a relação entre a aceleração linear de A e a aceleração angular de B: $a_A = r\alpha$.

---

b) Escreva o sistema de equações que permite determinar o movimento de A e a aceleração angular de B.

Resolução:

O seguinte conjunto de equações permite descrever o movimento deste sistema:

$$\begin{aligned} m_A g - T &= m_A a_A \\ Tr &= I_B \alpha \\ a_A &= r\alpha \end{aligned}$$

---

c) Qual a expressão que permite calcular o momento de inércia de B a partir da aceleração de A?

Resolução:

Resolvendo o sistema acima obtemos

$$I_B = \left(\frac{g}{a_A} - 1\right) m_A r^2 \,.$$

---

d) Considere que A é deixada cair a partir do repouso. Ao fim de 8 segundos deslocou-se $s = 0,5\,\mathrm{m}$. Qual a aceleração de A?

Resolução:

Uma vez que A parte do repouso, o seu deslocamento é

$$s = \frac{1}{2} a_A t^2$$

Substituindo valores obtemos $a_A = \frac{2\times 0,5\,\mathrm{m}}{8^2\,\mathrm{s}^2} = \frac{1}{64}\,\mathrm{m/s^2}$

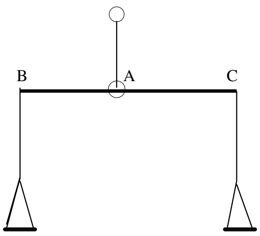
---

e) Calcule o momento de inércia de B.

Resultado:

Substituindo valores, obtemos

$$I = \left(\frac{9,8\,\mathrm{m/s^2}}{1/64\,\mathrm{m/s^2}} - 1\right) 0,3\,\mathrm{kg} \times (0,05\,\mathrm{m})^2 = 0,47\,\mathrm{kg\,m^2}$$



6.9. Um vendedor prepara-se para usar uma balança de braços, para pesar as cerejas que um inspector à paisana da ASAE lhe pretende comprar.

Enquanto estava à espera que lhe indicassem o peso das cerejas que colocara no saco e que fora suspenso em C, o Inspector repara que a balança não está bem centrada e que a distância d_2=AC é cerca de 1 cm maior que a distância d_1=AB=20 cm. O vendedor diz-lhe que no saco estão 2 kg de cerejas. O Inspector retira o saco do suporte em C e troca-o de posição com as massas usadas para pesar. Assim, as cerejas ficam suspensas em B e as massas em C.
Recorde a experiência mostrada numa aula teórica e responda às seguintes questões.

a) Qual a equação para o equilíbrio do sistema quando as cerejas estão suspensas em C e as massas em B? Obtenha a expressão para o valor da massa de cerejas contidas no saco em função do valor das massas colocadas em C e das distâncias d_1 e d_2.

Resolução:

Sejam, respectivamente, m e m_c as massas usados no prato B e no das cerejas. Para existir equilíbrio o binário resultante do peso nos dois pratos da balança tem de ser nulo. Isto é,

$$-mgd_1 + m_c g d_2 = 0$$

e portanto $m_c = (d_1/d_2)m$. Como $d_1 < d_2$, a massa real das cerejas é inferior ao valor de m.

---

b) Qual o valor da massa $m^\star$ que deve ser usado para equilibrar as cerejas quando estas passam para a posição B. Compare o novo valor com o resultado da alínea anterior.

Resolução:

Trocando de posições, para haver equilíbrio temos que ter $m^\star = (d_1/d_2)m_c$. Agora será a massa $m^\star$ que será menor do que a massa das cerejas. Podemos ainda comparar esse valor com o inicial. Substituindo valores obtemos $m^\star = (d_1/d_2)^2 m$.

---

c) Suponha que levava as cerejas numa missão espacial para um planeta distante e que as cerejas não sofrem quaisquer alterações durante a viagem. Quanto chega ao planeta resolve pesar as cerejas usando a mesma balança e coloca as cerejas na posição B. A força gravítica à superfície do planeta é 1/5 da força gravítica à superfície da Terra.
Qual o valor da massa que deve agora colocar em C para conseguir o equilíbrio do sistema? Compare com a situação na Terra.

Resultado:

A atração gravítica afecta ambas as massas de igual forma. O resultado da pesagem não depende da atracção gravítica mas unicamente da relação entre as massas nos dois pratos da balança.

6.10. Uma viatura está desligada, desengatada e destravada num plano inclinado.

a) Escreva as equações de Newton para a viatura.

b) Escreva a equação dos momentos para cada roda. Considere que as rodas são todas iguais e têm o mesmo raio e a mesma massa.

c) Calcule a expressão para aceleração do centro de massa.

d) Calcule a expressão para a força de atrito.

6.11. (*) Um automóvel Bolbo 85U3.0V6T4WS de massa igual a 1500 kg cujo motor aplica a cada uma das rodas motrizes um momento de força (binário) aproximadamente constante de $350\,\mathrm{N\,m}$, inicia a sua marcha num instante inicial ($t = 0\,\mathrm{s}$). As rodas têm raio $r = 0,5\,\mathrm{m}$ e momento de inércia $I = 2\,\mathrm{kg\,m^2}$.
Despreze quaisquer atritos internos no veículo e considere sempre que as rodas rolam sem deslizar, devido ao ABS, EBD, TCS, 4WD, etc... e da reacção do solo.

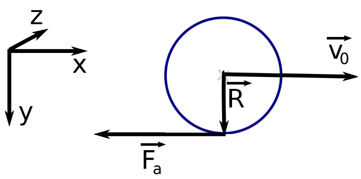
a) Determine a aceleração do centro de massa do automóvel no instante inicial. Comece por escrever a equação de Newton para o c.m. considerando que tem 4 forças de atrito iguais, cada uma aplicada numa roda. Escreva a equação dos momentos para uma roda considerando o momento da força de atrito e do binário do motor. Relacione a aceleração do c.m. (translacção) com a aceleração angular de uma roda. Resolva o sistema que obtém.

b) Suponha que a parte diferencial das rodas traseiras se parte. Calcule a aceleração do carro nesta situação, assumindo que todo o binário é transferido às rodas dianteiras.
Nota: Tome atenção ao sentido da força de atrito nas rodas traseiras e dianteiras. Repita o procedimento da alínea anterior.

6.12. Uma bola de bilhar com um raio, $R = 2,5\,\mathrm{cm}$, e massa $M = 300\,\mathrm{g}$, é posta em movimento com uma velocidade do centro de massa $v_o = 1\,\mathrm{m/s}$. O coeficiente de atrito entre a bola e o chão é $\mu = 0,04$. Devido ao valor da sua velocidade inicial, a bola começa o seu movimento deslizando. Sabendo que, para uma esfera, $I = \frac{2}{5}MR^2$, calcule:

a) Ao fim de quanto tempo a bola começa a rodar sem deslizar. Determine v (velocidade do centro de massa) e ω (velocidade angular), nesse instante t.

Resolução:



As forças que actuam na bola (com massa M e raio R) são a força gravítica, $\vec{F}_G = Mg\vec{e}_y$, a força normal da mesa $\vec{F}_N = -\vec{F}_G$ e a força de atrito $\vec{F}_a$. Da segunda lei de Newton segue-se:

$$\vec{F}_a = -\mu Mg\vec{e}_x = Ma\vec{e}_x \quad \Rightarrow \quad a = -\mu g$$

Para a soma dos momentos das forças $\mathcal{M}$, temos:

$$\sum \mathcal{M} = I\,\alpha$$

$$\mu MgR = \frac{2}{5}MR^2\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{5}{2}\frac{\mu g}{R}$$

No momento em que a roda para de deslizar temos $v = \omega R$ e podemos encontrar as seguintes equações para o movimento de translação do centro de massa e para o movimento de rotação segundo o eixo horizontal que passa pelo centro da bola:

$$v = v_0 + at = v_0 - \mu gt$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = \frac{5}{2}\frac{\mu g}{R}t$$

Com a condição $v = \omega R$ calcula-se o tempo que a bola está a deslizar:

$$v_0 - \mu g t = \frac{5}{2}\mu g t$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{2}{7}\frac{v_0}{\mu g} = 0,73\,\mathrm{s}$$

Com este valor podemos calcular a velocidade do centro de massa e a velocidade angular:

$$v = v_0 - \mu g t = v_0 - \mu g\left(\frac{2}{7}\frac{v_0}{\mu g}\right) = \frac{5}{7}v_0 = 0,71\,\mathrm{m/s}$$
$$\omega = \omega_0 + \alpha\, t = 0 + \frac{5}{2}\frac{\mu g}{R}\left(\frac{2}{7}\frac{v_0}{\mu g}\right) = \frac{5}{7}\frac{v_0}{R} = 28,6\,\mathrm{rad/s}$$

---

b) Qual o espaço percorrido até deixar de deslizar e começar a rodar?

Resolução:

A distância percorrida calcula-se a partir da equação do movimento:

$$\begin{aligned}
\Delta x &= v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\
&= v_0\left(\frac{2}{7}\frac{v_0}{\mu g}\right) - \frac{1}{2}\mu g\left(\frac{2}{7}\frac{v_0}{\mu g}\right)^2 \\
&= \frac{12}{49}\frac{v_0^2}{\mu g} \\
&= \frac{12}{49}\frac{(1\,\mathrm{m/s})^2}{0,04\cdot 9,8\,\mathrm{m/s^2}} \\
&= 0,62\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

---

c) Qual a energia dissipada?

Resolução:

A energia dissipada, E_D é a diferença entre a energia mecânica no início e no momento em que a bola deixa de deslizar:

$$\begin{aligned}
E_D &= \frac{1}{2}Mv_0^2 - \frac{1}{2}Mv^2 - \frac{1}{2}I\omega^2 \\
&= \frac{1}{2}Mv_0^2 - \frac{1}{2}Mv^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}MR^2\omega^2 \\
&= \frac{1}{2}M\left(v_0^2 - v^2 - \frac{2}{5}v^2\right) \\
&= 0,044\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

6.13. Sobre uma plataforma circular, na horizontal, rodando com velocidade angular de 1 volta em 2 segundos, coloca-se um cesto de 10 cm de raio e com 2 kg de maçãs a 1,5 m do centro da plataforma e que passa a rodar com a plataforma. Esta tem massa $M = 50\,\text{kg}$ e raio $R = 2\,\text{m}$. O momento de inércia da plataforma em torno do eixo de rotação é $I = M\,R^2/2$. Considere que há atrito entre a plataforma e o cesto. Calcule a velocidade angular da plataforma depois de se colocar o cesto.

Resolução:

Podemos considerar o sistema plataforma+cesto isolado e, portanto, o momento angular total do sistema conserva-se. Este, antes do cesto ser colocado na plataforma, é

$$\vec{L}_0 = I\vec{\omega}\,.$$

Ao colocarmos o cesto sobre a plataforma o momento de inércia do sistema aumenta para um valor I'. Uma vez que o momento angular se conserva, a velocidade angular terá de diminuir para um valor ω', tal que

$$\vec{\omega}' = \frac{I}{I'}\vec{\omega}$$

O problema reduz-se assim ao cálculo do momento de inércia do sistema plataforma+cesto. Esse momento de inércia é a soma do momento de inércia da plataforma em relação ao eixo central, que conhecemos, com o momento de inércia do cesto em relação ao eixo central, I_c: $I' = I + I_c$.

Uma vez que o cesto e a sua massa são pequenas em comparação com a da plataforma, podemos considerar o cesto pontual, com massa m e um momento angular $mr^2\omega'$. Isto é, $I_c = mr^2$. Usando este valor em I' e o valor indicado para I, obtemos

$$\omega' = \left[1 + 2\frac{m}{M}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^{-1}\omega$$

por sua vez, como $m \ll M$ e $r < R$, usando a aproximação $(1+x)^a = 1 + ax,\ x \ll 1$, temos

$$\omega' \approx \left[1 - 2\frac{m}{M}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\omega$$

Substituindo valores, obtemos

$$\omega' \approx 0,955\omega\,.$$

Podemos ainda calcular a energia que é dissipada pelas forças de atrito quando o cesto é colocado na plataforma. A conservação da energia permite-nos escrever

$$E_{R_0} = E_R + E_{\text{atrito}}$$

onde E_{R_0} e E_R são a energia cinética de rotação antes e depois da colocação do cesto. Substituindo valores temos

$$\begin{aligned}
E_{\text{atrito}} &= E_{R0} - E_R \\
&= \frac{1}{2}I\omega^2\left[1 - \left(1+\frac{I'}{I}\right)\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}I\omega^2\left[1 - \frac{1}{1+\frac{mr^2}{I}}\right] \\
&\approx \frac{1}{2}I\omega^2\left[\frac{mr^2}{I}\right] \\
&\approx \frac{1}{2}mr^2\omega^2
\end{aligned}$$

Note que este valor é equivalente à energia cinética de rotação de um anel ($I_{\text{anel}} = mr^2$) de raio r e massa m.

6.14. Analise o sistema indicado na figura 6.2 e que corresponde a um carrinho de linhas, com linha. Faça a experiência. Pegue num carrinho de linhas. Segure a linha na extremidade e puxe-a. Verifique qual o

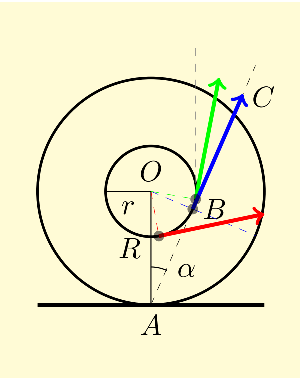
Figura 6.2: Carro de linhas

sentido de rotação do carrinho de linhas em função do ângulo φ que a linha faz com a horizontal. Explique o que observa.

Discussão:

Sejam R e r respectivamente os raios exterior e da circunferência interna do carro de linhas, conforme indicado na figura ao lado. O carro está em contacto com a superfície no ponto A e, admitindo que há atrito, é em redor deste ponto que o carro de linhas vai rodar. Por sua vez a direcção da linha será sempre a da tangente ao ponto da

circunferência interna onde a linha deixa de estar em contacto com o carrrinho.
Tracemos uma tangente à circunferência interna e que passa nos pontos ABC. Essa tangente faz um ângulo $\alpha = \arcsin(r/R)$ com a vertical. Se a direcção do fio (vector azul) coincidir com a desta tangente, o momento da força aplicada no fio, em relação ao ponto A, é nulo e o carro não roda. Se o fio estiver mais próximo da vertical (vector verde), deixa de estar em contacto com o carrinho num ponto acima de B. A linha entre este ponto e A fará um ângulo $\alpha' < \alpha$. No entanto o momento da força aplicada no fio já não é zero e determina um movimento de rotação no sentido anti-horário. Inversamente, Se o fio estiver mais inclinado para a horizontal (vector vermelho), deixa de estar em contacto com o carrinho num ponto abaixo de B. A linha entre este ponto e A também fará um ângulo $\alpha'' < \alpha$. O momento da força aplicada no fio também não é nulo e determina agora um movimento de rotação no sentido horário. Assim o ângulo α é um ângulo máximo e o ângulo para o qual ocorre a variação de direcção de movimento do carro de linhas.



6.15. Um meteoro com massa m_M aproxima-se do Sol. A uma grande distância, r_∞, quando é detectado, a velocidade é $v_\infty = 500\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$, e o parâmetro de impacto relativamente ao centro do Sol é $b = 10^{12}\,\mathrm{m}$, como se pode ver na figura 6.3. *Nota*: raio do sol $R_S = 6,96 \times 10^{8}\,\mathrm{m}$; massa do sol $M_S = 1,989 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$; constante gravitacional $G = 6,67 \times 10^{-11}\,{}^{\mathrm{Nm}^2}/_{\mathrm{kg}^2}$)

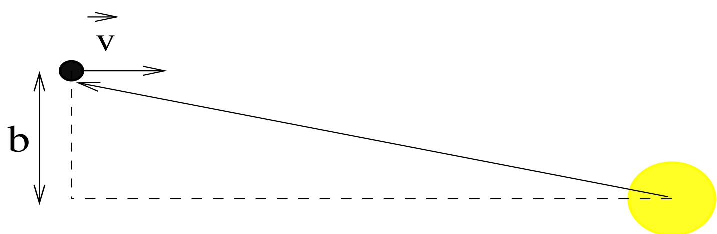


Figura 6.3: Meteoro aproxima-se do Sol

a) Qual a energia cinética, $E_C(r)$, e a energia potencial, $E_P(r)$, do meteoro quando é detectado a uma distância r_∞?

Resolução:

Com r_∞ a distância entre os centros de massa do Sol e do meteoro segue-se:

$$E_C(r_\infty) = \frac{1}{2}\, m_M\, v_\infty^2$$

$$E_P(r) = -G\frac{M_S\, m_M}{r}$$

Se $r = r_\infty \to \infty$ temos $\lim_{r\to\infty} E_P = 0$.

---

b) Qual a energia cinética e a energia potencial do meteoro quando está no ponto mais próximo do Sol (a uma distância r_{min})?

Resolução:

$$E_C(r_{min}) = \frac{1}{2}\, m_M\, v^2$$

$$E_P(r_{min}) = -G\frac{M_S\, m_M}{r_{min}}$$

---

c) Qual o momento angular do meteoro em relação ao centro do Sol no momento em que é detectado?

Resolução:

$$\vec{L}(r_\infty) = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m_M \vec{v}_\infty$$

$$L(r_\infty) = m_M\, r\, v_\infty\, sin(\alpha) = m_M\, b\, v_\infty$$

onde α é o ângulo entre a horizontal na figura 6.3 e a linha que liga o Sol e o meteoro no momento em que esse é detectado.

---

d) Qual o momento angular do meteoro em relação ao centro do Sol quando está no ponto mais próximo do Sol?

Resolução:

$$L(r_{min}) = m_M r_{min} v$$

---

e) Escreva a equação para a conservação da energia mecânica do meteoro relativamente ao instante em que é detectado (no ponto considerado infinito) e quando está no ponto mais próximo do Sol.

Resolução:

Considerando $r \to \infty$ no momento em que o meteoro é descoberto temos $E_P(r_\infty) = 0$ e a equação para a conservação da energia mecânica do meteoro é:

$$E_C(r_\infty) = E_C(r_{min}) + E_P(r_{min})$$

$$\frac{1}{2}\,m_M\,v_\infty^2 = \frac{1}{2}\,m_M\,v^2 - G\frac{M_S\,m_M}{r_{min}}$$

---

f) Escreva a equação para a conservação do momento angular do meteoro relativamente ao instante em que é detectado (no ponto considerado infinito) e quando está no ponto mais próximo do Sol.

Resolução:

$$L(r_\infty) = L(r_{min})$$

$$m_M b v_\infty = m_M r_{min} v \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{b}{r_{min}} v_\infty$$

---

g) Determine a distância mínima a que o meteoro passa do Sol.

Resolução:

Substituindo a expressão para v da alínea anterior na equação da conservação de energia obtém-se:

$$r_{min}^2 + \frac{2GM_S}{v_\infty^2}\,r_{min} - b^2 = 0$$

$$r_{min} = \frac{1}{2}\left[-\frac{2GM_S}{v_\infty^2} \pm \sqrt{\frac{4G^2M_S^2}{v_\infty^4} + 4b^2}\right]$$

Uma vez que só a resposta positiva tem significado físico, segue-se:

$$r_{min} = 9,4 \cdot 10^8\ \mathrm{m}$$

Nota: A solução de uma equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ é dada por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2a}$$

---

h) Qual a velocidade do meteoro quando passa no ponto mais próximo do Sol?

Resolução:

$$v = \frac{b\,v_\infty}{r_{min}} = \frac{10^{12}\ \mathrm{m} \cdot 500\ \mathrm{m/s}}{9,4 \cdot 10^8\ \mathrm{m}} = 5,3 \cdot 10^5\ \mathrm{m/s}$$

---

i) Qual o valor mínimo do parâmetro de impacto para que o meteoro não caia no Sol.

Resolução:

Para determinar o parâmetro de impacto para que o meteoro não caia no Sol substitui-se $r_{min} = R_S$ na equação para a conservação do momento angular da alínea f).

$$b_{min} > \frac{v\, R_S}{v_\infty}$$

Obtém-se a velocidade v da equação da conservação da energia mecânica para a distância $r = R_S$:

$$\frac{1}{2}\, m_M\, v_\infty^2 = \frac{1}{2}\, m_M\, v^2 - G\frac{M_S\, m_M}{R_S}$$

$$v^2 = v_\infty^2 + 2\, G\frac{M_S}{R_S}$$

Logo:

$$b_{min} > \sqrt{v_\infty^2 + 2\, G\frac{M_S}{R_S}} \cdot \frac{R}{v_\infty}$$

$$b_{min} > \sqrt{R^2 + \frac{2GM_SR_S}{v_\infty^2}} = 8,6 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$$