TÉCNICO LISBOA

1° Teste de EO

5 de Novembro de 2013
19H00
Duração: 1H30

Electromagnetismo e Óptica

MEC/LEGM
1° semestre de 2013-2014

Prof. Amaro Rica da Silva
Prof. Rodrigo Abreu
Prof. Pedro Abreu
Assist. João Pedro Canhoto

- Inicie a resolução de cada Grupo numa nova página.
- Identifique claramente todas as folhas do teste e não as separe.

Grupo I

Uma barra rectilínea vertical, de comprimento $2L$, está carregada com carga Q, distribuída de forma não uniforme com densidade $\lambda = \lambda_o\,|z|$, onde $|z|$ representa a distância ao centro da barra.

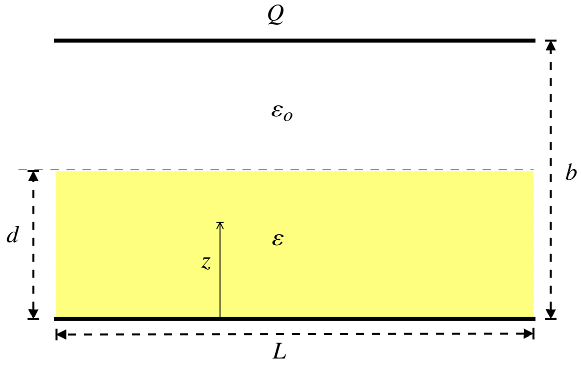
[2.0] **a)** Determine a constante λ_o em função da carga total Q e do comprimento $2\,L$ da barra. Calcule o potencial $\varphi(r)$ num ponto arbitrário P à distância r da barra, pertencente ao plano horizontal que passa pelo centro desta. Determine e o campo elétrico $\vec{E}(\vec{r})$ nesse ponto.

Considere agora um condensador plano com armaduras quadradas de lado L e separação $b \ll L$, parcialmente preenchido na parte inferior com um dielétrico de permitividade $\varepsilon = \varepsilon_o\,(1 + \alpha\,(d - z))$ onde z é a distância à armadura inferior.

[2.0] **b)** Determine o campo elétrico $\vec{E}$ em todas as regiões do espaço, assumindo que o condensador está carregado com carga Q.

[2.0] **c)** Determine o potencial $\varphi(z)$ em função da distância z à armadura inferior e a capacidade total C deste condensador.

[2.0] **d)** Determine as densidades de carga de polarização no dielétrico e explique a sua distribuição.



[2.0] **e)** Determine a energia armazenada no condensador e as forças exercidas sobre as armaduras.

Justifique as suas repostas em todas as alíneas.

R: a) A carga total Q na barra é

$$Q = \int_{-L}^{L} \lambda_o\,|z|\,dz = 2\lambda_o \int_0^L z\,dz = \lambda_o L^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_o = \frac{Q}{L^2} \tag{1}$$

O potencial num ponto à distância r do meio da barra é a soma dos potenciais devido a cargas elementares $dq(z) = \lambda_o |z|\, dz$ da barra, e dada a simetria da distribuição de cargas em relação ao plano horizontal

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_{-L}^{L}\frac{\lambda_o |z|\, dz}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{\lambda_o}{2\pi\varepsilon_o}\int_0^L \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\, dz = \frac{\lambda_o}{2\pi\varepsilon_o}\left(\sqrt{r^2+L^2} - r\right) \tag{2}$$

O campo elétrico só tem componente radial neste plano horizontal, pelo que

$$\vec{\boldsymbol{E}}\left(\vec{\boldsymbol{r}}\right) = -\nabla\varphi(r) = -\frac{\partial\varphi(r)}{\partial r}\,\vec{\boldsymbol{e}}_r = \frac{\lambda_o}{2\pi\varepsilon_o}\left(1 - \frac{r}{\sqrt{r^2+L^2}}\right)\vec{\boldsymbol{e}}_r \tag{3}$$

R: b) A condição $L \gg b$ indica que podemos assumir as armaduras como planos infinitos de carga com densidade de carga $\sigma_c = \pm\frac{Q}{A}$, onde $A = L^2$, pelo que a carga na armadura inferior é $-Q$ e o campo fora do condensador é zero. Usando a lei de Gauss generalizada podemos calcular $\vec{\boldsymbol{D}}$ para qualquer valor de $z \in [0, b]$, resultando em geral que $\vec{\boldsymbol{D}}(z)\cdot\vec{\boldsymbol{n}} = \sigma_c$, onde $\vec{\boldsymbol{n}} = -\vec{\boldsymbol{e}}_z$. Assim determinamos o campo $\vec{\boldsymbol{E}}(z)$

$$\vec{\boldsymbol{D}}(z) = \varepsilon\,\vec{\boldsymbol{E}}(z) = -\frac{Q}{A}\,\vec{\boldsymbol{e}}_z \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{\boldsymbol{E}}(z) = \begin{cases} -\frac{Q}{\varepsilon_o A}\,\vec{\boldsymbol{e}}_z & \text{para } d < z < b \\ \\ -\frac{Q}{\varepsilon_o (1+\alpha(d-z))A}\,\vec{\boldsymbol{e}}_z & \text{para } 0 < z < d \end{cases} \tag{4}$$

R: c) O potencial é, escolhendo $\varphi(d) = 0$,

$$\varphi(z) = \varphi(d) - \int_d^z \vec{\boldsymbol{E}}(z)\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_z dz = \begin{cases} \frac{Q}{\varepsilon_o A}(z-d) & \text{para } d < z < b \\ \\ -\frac{Q}{\varepsilon_o A}\,\frac{1}{\alpha}\,\log(1+\alpha\,(d-z)) & \text{para } 0 < z < d \end{cases} \tag{5}$$

A queda de tensão total é $V = \varphi(b) - \varphi(0) = \frac{Q}{\varepsilon_o A}\left(b - d + \frac{1}{\alpha}\log(1+\alpha\, d)\right)$ pelo que a capacidade é

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_o A}{b - d + \frac{1}{\alpha}\,\log(1+\alpha\, d)} \tag{6}$$

R: d) Uma vez que $\varepsilon - \varepsilon_o = \varepsilon_o\,\alpha\,(d-z)$ para $0 \le z < d$, a polarização é

$$\vec{\boldsymbol{P}}(z) = \left(\varepsilon - \varepsilon_o\right)\vec{\boldsymbol{E}}(z) = \begin{cases} 0 & \text{para } d \le z < b \\ \\ -\frac{Q\,\alpha\,(d-z)}{A\,(1+\alpha\,(d-z))}\,\vec{\boldsymbol{e}}_z & \text{para } 0 \le z < d \end{cases} \tag{7}$$

As cargas superficiais de polarização são

$$\sigma_p = \vec{\boldsymbol{P}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}_{ext} = \begin{cases} \vec{\boldsymbol{P}}(d)\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_z = 0 & \text{para } z = d \\ \\ \vec{\boldsymbol{P}}(0)\cdot\left(-\vec{\boldsymbol{e}}_z\right) = \frac{Q\,\alpha\, d}{A\,(1+\alpha\, d)} & \text{para } z = 0 \end{cases} \tag{8}$$

As densidade volúmica de carga de polarização só existe para $z \in [0, d]$

$$\rho_p(z) = -\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{P}}(z) = \partial_z\left(\frac{Q\,\alpha\,(d-z)}{A\,(1+\alpha\,(d-z))}\right) = -\frac{Q\,\alpha}{A(1+\alpha(d-z))^2} \tag{9}$$

R: e) A energia armazenada no condensador é

$$U_c = \frac{1}{2}\,Q\,V = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2}{2\,\varepsilon_o A}\left(b - d + \frac{1}{\alpha}\,\log(1+\alpha\, d)\right) \tag{10}$$

A força exercida sobre as armaduras é a força que o campo de cada armadura exerce sobre a outra.

$$\vec{\boldsymbol{F}}_+(b) = -Q\,\frac{\sigma_c}{2\,\varepsilon_o}\vec{\boldsymbol{e}}_z = -\frac{Q^2}{2\,\varepsilon_o A}\vec{\boldsymbol{e}}_z = -\vec{\boldsymbol{F}}_-(0) \tag{11}$$

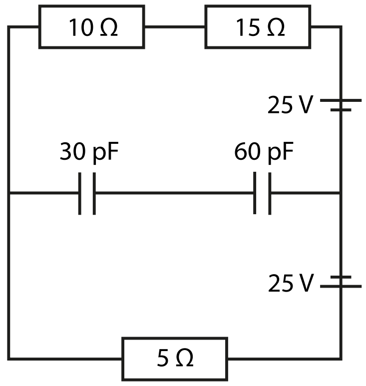
Grupo II

Um cilindro metálico maciço de raio R e comprimento L tem uma resistividade elétrica crescente com a distância x a um dos extremos: $\rho_e = \rho_o(1 + \frac{x}{L})$.

[2.0] **a)** Calcule a resistência elétrica do cilindro.

[2.0] **b)** Supondo que aplica um diferença de potencial elétrica V aos extremos do cilindro. Calcule a intensidade da corrente e a densidade de corrente elétrica que atravessa o cilindro, em função da distância r ao eixo do cilindro e da distância x ao extremo do cilindro.

No circuito da figura ao lado, os condensadores de capacidades $C = 30\,pF$ e $60\,pF$ estão inicialmente descarregados, quando se liga o circuito. As baterias têm resistência interna desprezável.



[2.0] **c)** calcule as correntes em todos os ramos do circuito no instante inicial e quando os condensadores estiverem "totalmente"carregados.

[2.0] **d)** calcule a potência dissipada no circuito no instante inicial e a potência inicial fornecida pelas baterias.

[2.0] **e)** calcule a carga máxima atingida pelos condensadores neste circuito.

R: a) A resistência total pode ser calculada assumindo que, para uma queda de tensão ΔV na direção da corrente, a densidade de corrente é $J = \frac{I}{S} = \sigma_e \frac{\Delta V}{\Delta x}$ e portanto $\Delta V = \frac{\Delta x}{\sigma_e S}\, I = \Delta R_e\, I$, ou seja, usando $\frac{1}{\sigma_e} = \rho_e$,

$$R_e = \int_0^L \frac{\rho_e(x)\, dx}{S} = \frac{\rho_o}{\pi R^2} \int_0^L \left(1 + \frac{x}{L}\right) dx = \frac{3\rho_o L}{2\pi R^2} \tag{12}$$

R: b) A corrente elétrica que atravessa o cilindro não vai depender de r, pois na secção a resistividade elétrica é constante para qualquer x, e também não vai depender de x, pois toda a corrente que entra no cilindro terá que sair no outro extremo, isto é, não se acumula carga elétrica no interior do cilindro. É como se o cilindro fosse uma sucessão infinita de resistências de espessura desprezável associadas em série. A corrente que passa na primeira passa em todas as outras, e a resistência equivalente foi calculada na alínea anterior.

A corrente elétrica é, pela Lei de Ohm

$$I = \frac{V}{R_e} = \frac{2\pi R^2 V}{3\rho_o L} \tag{13}$$

A densidade de corrente será

$$J = \frac{I}{\pi R^2} = \frac{2V}{3\rho_o L} \tag{14}$$

R: c) No instante inicial a linha de condensadores funciona como um curto circuito, sem resistência. Designando por I_1 a corrente no ramo superior no sentido da força eletromotriz $\mathcal{E}_1$, I_2 a corrente no ramo dos condensadores da esquerda para a direita e I_3 a corrente no ramo inferior no sentido da força eletromotriz $\mathcal{E}_2$, devemos ter, com $R_1 = 15\,\Omega$, $R_2 = 10\,\Omega$, $R_3 = 5\,\Omega$ e $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = 25\,\Omega$,

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1 = \left(R_1 + R_2\right) I_1 & \Rightarrow \quad I_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{R_1+R_2} = 1\ A \\ \mathcal{E}_2 = R_3 I_3 & \Rightarrow \quad I_3 = \frac{\mathcal{E}_2}{R_3} = 5\ A \\ I_2 = I_1 + I_3 & \Rightarrow \quad I_2 = 6\ A \end{cases} \tag{15}$$

Quando os condensadores estão completamente carregados $I_2 = \frac{dQ_c}{dt} = 0$, ou seja não há corrente no ramo dos condensadores que funciona como um circuito aberto. Mas então a soma de forças eletromotrizes percorridas no circuito exterior num sentido só é $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = 0 = \left(R_1 + R_2 + R_3\right) I$ o que significa que também aí não há corrente, $I = 0$.

R: d) A potência total dissipada no instante inicial pelas resistências é

$$\mathcal{P}_d = \left(R_1 + R_2\right) I_1^2 + R_3 I_3^2 = 150\,W \tag{16}$$

A potência fornecida pelas baterias é

$$\mathcal{P}_u = I_1\,\mathcal{E}_1 + I_3\,\mathcal{E}_2 = 150\,W \tag{17}$$

R: e) Quando os condensadores ficam totalmente carregados deixa de haver corrente nesse ramo, o que significa que a tensão entre a primeira e última armadura (da esquerda para a direita) da série de condensadores é igual a $\mathcal{E}_1 = 25\ V = \mathcal{E}_2$.

As cargas máximas nos dois condensadores, Q_1 e Q_2, têm que ser iguais, pois no troço central (fio que liga os dois condensadores mais as placas dos dois condensadores viradas para o centro) não entra nem sai carga elétrica, isto é, a carga total é sempre nula.

Assim a carga máxima em ambos condensadores é

$$Q_{\max} = \mathcal{E}_1 \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} = 0.5\ nC \tag{18}$$

Formulário

$\int \frac{s}{\sqrt{a^2+s^2}}\, ds = \sqrt{a^2+s^2}$

$\int \frac{s}{\left(a^2+s^2\right)^{3/2}}\, ds = -\frac{1}{\sqrt{a^2+s^2}}$

$\int \frac{s}{a+s}\, ds = s - a\log(a+s)$

$\int \frac{s}{(a+s)^2}\, ds = \frac{a}{a+s} + \log(a+s)$

$d\vec{S} = r\,d\theta\,dz\,\vec{e}_r + dr\,dz\,\vec{e}_\theta + r\,dr\,d\theta\,\vec{e}_z$

$d\mathcal{V} = r\,dr\,d\theta\,dz$

$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$

$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{e}_z$

$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

$\vec{E}\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int \frac{\vec{r}-\vec{r}_q}{\left|\vec{r}-\vec{r}_q\right|^3}\, dq\left(\vec{r}_q\right)$

$\varphi\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int \frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_q\right|}\, dq\left(\vec{r}_q\right)$

$\vec{E}\left(\vec{r}\right) = -\nabla\varphi\left(\vec{r}\right)$

$\varphi\left(\vec{r}_B\right) = \varphi\left(\vec{r}_A\right) - \int_{AB} \vec{E}\cdot d\vec{r}$

$\vec{D} = \varepsilon_o\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon\vec{E}$

$\rho_p = -\nabla\cdot\vec{P} \quad ; \quad \sigma_p = \vec{P}\cdot\vec{n}_{\text{ext}}$

$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \left(Q_c\right)_{int}$

$\rho_c = \nabla\cdot\vec{D} \quad ; \quad \sigma_c = \left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right)\cdot\vec{n}$

$Q = C\,V$

$U_c = \frac{1}{2}Q\,V$

$\vec{J} = \sigma_e\vec{E}$

$I = \iint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$

$U_e = \frac{1}{2}\int V\left(\vec{r}_q\right)\, dq\left(\vec{r}_q\right) = \frac{1}{2}\iiint u_e(\vec{r})\, d\mathcal{V}$

$u_e = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \approx 9\times 10^9\ \left(\frac{Vm}{C}\right)$

$q_e \approx -1.602\times 10^{-19}\ (C)$