



2º Teste de EO

13 de Dezembro de 2013

19H00

Duração: 1H30

Electromagnetismo e Óptica

MEC/LEGM

1º semestre de 2013-2014

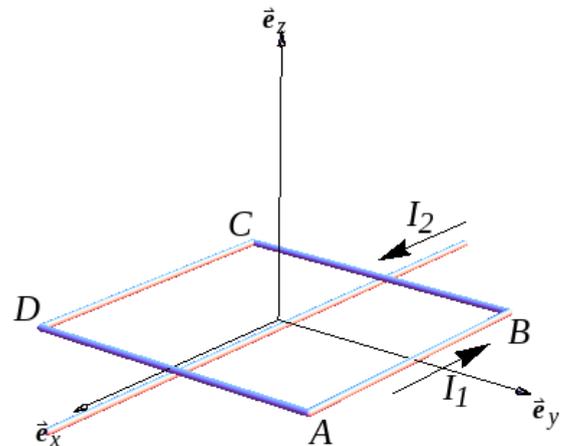
Prof. Amaro Rica da Silva
Prof. Rodrigo Abreu

Prof. Pedro Abreu
Assist. João Pedro Canhoto

- Inicie a resolução de cada Grupo numa nova página.
- Identifique claramente todas as folhas do teste e não as separe.

Grupo I

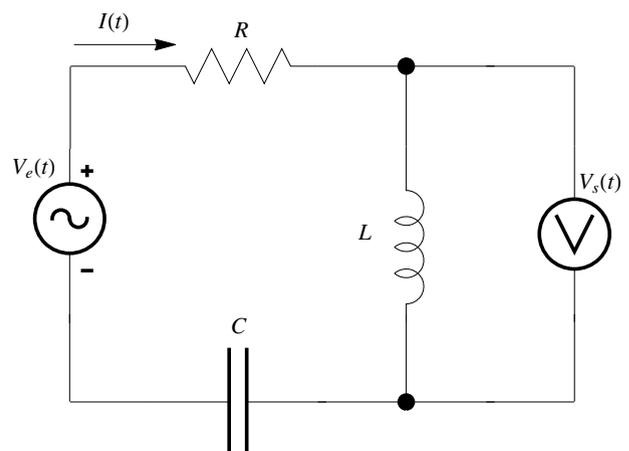
Uma espira condutora quadrada de lado $2a$ é percorrida por uma corrente I_1 como indicado na figura. Um fio condutor rectilíneo transportando uma corrente I_2 no mesmo plano que a espira passa pelo seu centro paralelamente a dois dos lados. (Os pontos de contacto entre os dois condutores estão devidamente isolados)



- [2.0] a) Determine o campo magnético \vec{B}_1 no centro da espira devido à corrente I_1 . ⁽¹⁾
- [2.0] b) Calcule o campo magnético \vec{B}_2 da corrente I_2 num ponto arbitrário.
- [2.0] c) Determine a magnitude e direcção da força resultante sobre a espira.

Considere o circuito representado na figura ao lado. Assumindo que a fonte de tensão à entrada $V_e(t)$ é sinusoidal de frequência ω determine:

- [2.0] d) A impedância Z do circuito e a corrente $I(t)$. Qual é a diferença de fase entre a corrente e a tensão aplicada?
- [2.0] e) Determine a tensão à saída $V_s(t)$. Qual é a diferença de fase entre as tensões à entrada e à saída? Explique como se comporta $V_s(t)$ em função da frequência ω e qual a possível aplicação deste circuito.



¹ Note que $\int \frac{b^2}{(b^2 + s^2)^{3/2}} ds = \frac{s}{\sqrt{b^2 + s^2}}$

Resolução Grupo I:

R: a) A contribuição de cada lado da espira para o campo no seu centro é idêntica e dirigida segundo \vec{e}_z . Usando a lei de Biot-Savart para o lado AB , após a sua parametrização através de $\vec{l} = s \vec{e}_x + a \vec{e}_y$ com $s \in [-a, a]$, obtemos para a posição $\vec{r} = 0$ a expressão

$$\begin{aligned} \vec{B}_1(0) &= 4 \int_{AB} d\vec{B}_1 = \frac{\mu_o}{\pi} \int_{AB} \frac{I_1 d\vec{l} \times (-\vec{l})}{|\vec{l}|^3} = \frac{\mu_o I_1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{(ds \vec{e}_x) \times (s \vec{e}_x + a \vec{e}_y)}{(a^2 + s^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_o I_1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{a \vec{e}_z}{(a^2 + s^2)^{3/2}} ds = \frac{\mu_o I_1}{\pi} \frac{1}{a} \left[\frac{s}{\sqrt{a^2 + s^2}} \right]_{-a}^a \vec{e}_z = \frac{\sqrt{2} \mu_o I_1}{\pi} \frac{1}{a} \vec{e}_z \end{aligned} \quad (1)$$

R: b) Para um fio rectilíneo infinito com corrente I_2 o campo pode ser obtido através da Lei de Ampère. Para um ponto arbitrário $\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$, a circulação de \vec{B}_2 ao longo de um círculo que passa por \vec{r} num plano perpendicular ao fio, centrado na intersecção do plano com o fio, é

$$\oint \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} = \mu_o I_2 \quad \Rightarrow \quad B_2(\vec{r}) = \frac{\mu_o I_2}{2\pi \sqrt{y^2 + z^2}} \quad (2)$$

A direcção de $\vec{B}_2(\vec{r})$ é tangente ao círculo, e pode ser definida como

$$\vec{e}_\tau(\vec{r}) = \frac{\vec{e}_x \times (y \vec{e}_y + z \vec{e}_z)}{\sqrt{y^2 + z^2}} = \frac{(-z \vec{e}_y + y \vec{e}_z)}{\sqrt{y^2 + z^2}} \quad (3)$$

pelo que $\vec{B}_2(\vec{r}) = B_2(\vec{r}) \vec{e}_\tau(\vec{r}) = \frac{\mu_o I_2}{2\pi} \frac{(-z \vec{e}_y + y \vec{e}_z)}{(y^2 + z^2)}$

R: c) No plano da espira ($z = 0$) o campo magnético do fio é $\vec{B}_2 = \frac{\mu_o I_2}{2\pi y} \vec{e}_z$ e a força sobre cada segmento de corrente $I_1 d\vec{l}$ da espira é

$$d\vec{F}(\vec{l}) = I_1 d\vec{l} \times \vec{B}_2(\vec{l}) = \frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi y} d\vec{l} \times \vec{e}_z \quad (4)$$

Uma vez que $y \in [-a, a]$ nos lados BC e DA , a força em cada um destes lados é zero por simetria.

No lado AB , temos $y = a$ e a força que o campo \vec{B}_2 exerce sobre a corrente I_2 é

$$\vec{F}_{AB} = \int_{AB} d\vec{F}(\vec{l}) = \frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi a} (-2a \vec{e}_x) \times \vec{e}_z = \frac{\mu_o I_1 I_2}{\pi} \vec{e}_y \quad (5)$$

enquanto no lado CD , temos $y = -a$ e a força é igual porque tanto a corrente como o campo invertem de sentido:

$$\vec{F}_{CD} = \int_{CD} d\vec{F}(\vec{l}) = \frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi(-a)} (2a \vec{e}_x) \times \vec{e}_z = \frac{\mu_o I_1 I_2}{\pi} \vec{e}_y \quad (6)$$

A força total é $\vec{F} = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{CD} = \frac{2\mu_o I_1 I_2}{\pi} \vec{e}_y$

R: d) Para um circuito RLC em série com uma fonte de tensão harmónica $V_e(t) = V_o e^{i\omega t}$ a impedância é

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C = R + i(X_L - X_C) = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (7)$$

onde $Z_R = R$, $Z_L = i X_L$, $Z_C = -i X_C$, e as reactâncias são $X_L = \omega L$ e $X_C = \frac{1}{\omega C}$.¹

A corrente é

$$I(t) = \frac{1}{Z} V_e(t) = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} e^{i(\omega t - \phi)} \quad (9)$$

onde $Z = |Z| e^{i\phi}$ com $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)$.

R: e) À saída a tensão será

$$V_s(t) = Z_L I(t) = \frac{Z_L}{Z} V_e(t) = \frac{X_L}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} V_o e^{i(\omega t - \varphi_s)} \quad (10)$$

onde $\varphi_s = \tan^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) - \frac{\pi}{2}$.

Para baixas frequências $X_L = \omega L \rightarrow 0$, $X_C = \frac{1}{\omega C} \rightarrow \infty$ e a tensão à saída tende para zero (a queda de potencial dá-se toda no condensador), enquanto que para altas frequências $X_L \rightarrow \infty$ e a tensão à saída tende a imitar a tensão à entrada (i.e. a queda de potencial dá-se toda na indutância). Pode ser visto como um filtro passa-altas frequências.

¹Esta fórmula resulta de observar que, no regime estacionário,

$$\frac{dV_e(t)}{dt} = i \omega V_e(t) \quad ; \quad \frac{dQ(t)}{dt} = I(t) = I_o e^{i(\omega t - \phi)}$$

$$V_e(t) - L \frac{dI(t)}{dt} = RI(t) + \frac{Q(t)}{C} \quad \implies \quad \frac{dV_e(t)}{dt} = L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{I(t)}{C} \quad (8)$$

$$i \omega V_e(t) = \left(-\omega^2 L + i \omega R + \frac{1}{C}\right) I(t) \quad \implies \quad V_e(t) = \left(R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right) I(t) = Z I(t)$$

Grupo II

Uma espira plana quadrada de lado $a = 0.1 \text{ m}$, de massa $m = 0.1 \text{ kg}$ e resistência elétrica total $R = 10 \Omega$, cai na vertical, sob a ação da gravidade terrestre, quando entra numa zona de campo magnético uniforme $\vec{B} = 0.1 \vec{n} \text{ T}$ onde \vec{n} é normal ao plano da espira). Admita que a espira atinge rapidamente a velocidade limite $v = 2 \text{ m/s}$.

- [2.0] d) Calcule a corrente induzida na espira, indicando o sentido (faça um esquema). Em que condições é que circula corrente na espira?
- [2.0] e) Calcule a energia elétrica total dissipada na espira por efeito de Joule, desde que a espira começa a entrar na zona de campo magnético até que toda a espira saia totalmente dessa zona.

Um entreferro toroidal, de raio central R e secção quadrada de lado a , é constituído por um material de permeabilidade $\mu \gg \mu_0$. Tem enrolado à sua volta um condutor com N_1 espiras, uniformemente distribuídas sobre todo o entreferro, percorridas pela corrente I_1 . Um segundo conjunto de N_2 espiras envolve o primeiro enrolamento, transportando uma corrente I_2 no sentido contrário à primeira.

- [2.0] a) Determine os campos $\vec{H}(\vec{r})$, $\vec{B}(\vec{r})$, a magnetização $\vec{M}(\vec{r})$ em função da distância r ao eixo \vec{e}_z , perpendicular ao plano do toróide e passando pelo seu centro. Descreva qualitativamente como devem ser as as correntes de magnetização no entreferro. Justifique a sua resposta.
- [2.0] b) Assumindo agora que $a \ll R$, de forma que o campo é aproximadamente constante em todos os pontos duma secção do entreferro, determine os coeficientes de auto-indução e de indução mútua de cada enrolamento e a energia armazenada no sistema.
- [2.0] c) Se se abrir no entreferro uma fenda estreita de largura δ de modo que não haja grandes perdas de fluxo magnético na fenda, qual a força que actua nas suas faces assumindo que está cheia de ar.

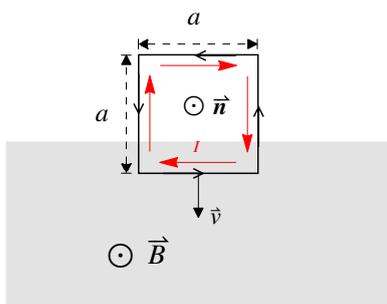
Resolução Grupo II

R: d) Ao entrar na zona com campo magnético, o fluxo através da espira aumenta à taxa

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{B} \cdot \vec{n} a (z_0 + vt)) = Bav = 0.02 \frac{\text{Wb}}{\text{s}} \quad (11)$$

pelo que a f.e.m induzida é, pela Lei de Faraday,

$$\mathcal{E}_{e.m.} = -\frac{d\Phi}{dt} \implies I = -\frac{\mathcal{E}_{e.m.}}{R} = -\frac{Bav}{R} = -2 \text{ mA} \quad (12)$$



Esta corrente existe enquanto houver variação de fluxo magnético, ou seja enquanto a espira estiver parcialmente inserida na região com campo magnético. A partir do momento em que entra completamente dentro do campo magnético deixa de haver variação de fluxo, logo deixa de haver corrente induzida.

R: e) A potência dissipada por uma corrente I numa resistência R é $\mathcal{P}_d = RI^2$. A velocidade constante a espira leva $\Delta t = \frac{a}{v}$ segundos a entrar ou a sair completamente na região do campo magnético, portanto a energia dissipada é

$$\Delta U_d = 2\Delta t \mathcal{P}_d = 2 \frac{a}{v} R \left(\frac{Bav}{R} \right)^2 = \frac{2a^3 B^2 v}{R} = 4 \mu J \quad (13)$$

R: a) Usando a Lei de Ampère para um círculo de raio $r \in [R_c - a/2, R_c + a/2]$ passando dentro do entreferro, temos uma circulação que envolve uma corrente total $I_{int} = N_1 I_1 - N_2 I_2$. Obtemos assim

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{int} \quad \Rightarrow \quad H_\theta(r) = \frac{(N_1 I_1 - N_2 I_2)}{2\pi r} \quad (14)$$

donde resulta, num sistema de coordenadas cilíndricas com \vec{e}_z coincidente com o eixo do toróide,

$$\vec{H}(\vec{r}) = H_\theta(r) \vec{e}_\theta(\theta) \quad ; \quad \vec{B}(\vec{r}) = \mu \vec{H}(\vec{r}) \quad ; \quad \vec{M}(\vec{r}) = \chi_m \vec{H}(\vec{r}) = \frac{(\mu - \mu_o)}{\mu_o} \vec{H}(\vec{r}) \quad (15)$$

Não havendo correntes de condução dentro do entreferro, em qualquer circuito fechado dentro dele temos $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 = \iint_S \nabla \times \vec{H} \cdot d\vec{S}$, logo $\nabla \times \vec{H} = 0$ dentro do entreferro. Assim $\vec{J}_{m_v} = \nabla \times \vec{M} = \chi_m \nabla \times \vec{H} = 0$. Não há portanto correntes de magnetização em volume.

A única componente não nula da magnetização \vec{M} é $M_\theta(r) = \chi_m H_\theta(r)$, logo as correntes de magnetização superficiais $\vec{J}_{m_s} = \vec{M} \times \vec{n}_{ext}$ são proporcionais a $\vec{e}_\theta \times \pm \vec{e}_z = \pm \vec{e}_r$, nas faces superior e inferior planas, ou $\vec{e}_\theta \times \pm \vec{e}_r = \mp \vec{e}_z$ nas faces laterais cilíndricas, e circulam à volta de cada secção do entreferro.

R: b) O campo \vec{B} dentro do entreferro pode ser visto como a sobreposição dos campos de cada enrolamento com correntes I_1 e I_2 (orientadas em sentidos opostos)

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu N_1 I_1}{2\pi R_c} \vec{e}_\theta \quad ; \quad \vec{B}_2 = -\frac{\mu N_2 I_2}{2\pi R_c} \vec{e}_\theta \quad (16)$$

Assim os auto-fluxos e fluxos mútuos podem ser calculados para cada enrolamento.

$$\begin{cases} \Phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12} = N_1 (B_1 a^2) + N_1 (B_2 a^2) = L_1 I_1 + M_{12} I_2 \\ \Phi_2 = \phi_{21} + \phi_{22} = N_2 (-B_1 a^2) + N_2 (B_2 a^2) = M_{21} I_1 + L_2 I_2 \end{cases} \quad (17)$$

donde

$$L_1 = \frac{\mu N_1^2 a^2}{2\pi R_c} \quad ; \quad M_{12} = -\frac{\mu N_1 N_2 a^2}{2\pi R_c} = M_{21} \quad ; \quad L_2 = \frac{\mu N_2^2 a^2}{2\pi R_c} \quad (18)$$

A energia armazenada é

$$U_m = \frac{1}{2} (I_1 \Phi_1 + I_2 \Phi_2) = \frac{1}{2} (L_1 I_1^2 + 2M_{12} I_1 I_2 + L_2 I_2^2) = \frac{\mu a^2}{4\pi R_c} (N_1 I_1 - N_2 I_2)^2 = \left(\frac{1}{2\mu} B^2 \right) 2\pi R_c a^2 \quad (19)$$

R: c) Como o campo sai perpendicularmente à face da fenda, e pela continuidade da componente normal do \vec{B} na transição entre meios dielétricos, obtemos

$$\vec{B}_{ar} = \vec{B}_{e.f.} \quad \Longrightarrow \quad \vec{H}_{e.f.} = \frac{\mu_o}{\mu} \vec{H}_{ar} \quad (20)$$

Usando L para designar o percurso dentro do entreferro e $I_{tot} = N_1 I_1 - N_2 I_2$, um circuito magnético de secção constante através do entreferro e fenda pode ser usado para derivar a expressão

$$H_{ar} \delta + H_{e.f.} L = \left(\delta + \frac{\mu_o}{\mu} L \right) H_{ar} = I_{tot} \quad \Longrightarrow \quad H_{ar} = \frac{I_{tot}}{\delta + \frac{\mu_o}{\mu} L} \quad (21)$$

A energia na fenda é assim a (densidade de energia magnética)×(volume da fenda),

$$U_{ar} \approx \frac{\mu_o}{2} H_{ar}^2 a^2 \delta \quad (22)$$

e assumindo que não há perda de fluxo magnético em qualquer pequena deformação do entreferro que aumente ligeiramente a espessura da fenda (mantendo o comprimento total L de entreferro), a força entre as faces é

$$F = - \left(\frac{\partial U_{ar}}{\partial \delta} \right)_{\Phi} = - \frac{\mu_o a^2}{2} \left(H_{ar}^2 + 2 H_{ar} \frac{\partial H_{ar}}{\partial \delta} \delta \right) = - \frac{\mu_o a^2 \left(\delta - \frac{\mu_o}{\mu} L \right) I_{tot}^2}{2 \left(\delta + \frac{\mu_o}{\mu} L \right)^3} \quad (23)$$

Formulário

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

$$\vec{F}_m(\vec{r}_q) = q \vec{v}_q \times \vec{B}(\vec{r}_q)$$

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{l})}{|\vec{r} - \vec{l}|^3}$$

$$\oint_c \vec{H}(\vec{l}) \cdot d\vec{l} = I_{cim}$$

$$\mathcal{E}_{em} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Phi_k = \int \int_{S_k} \vec{B} \cdot d\vec{S} = L_k I_k + \sum_{j \neq k} M_{kj} I_j$$

$$U_m = \frac{1}{2} \sum_k I_k \Phi_k = \int \int \int \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} dV$$

$$\mu_o = 4\pi \times 10^{-7} \left(\frac{H}{m} \right)$$

$$\vec{A} = A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_z \vec{e}_z$$

$$d\vec{F}_m(\vec{l}) = I d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{l})$$

$$\vec{B} = \mu_o (\vec{H} + \vec{M})$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$$\vec{J}_{m_s}(\vec{r}_s) = \vec{M}(\vec{r}_s) \times \vec{n}_{ext}(\vec{r}_s)$$

$$\vec{J}_m(\vec{r}) = \nabla \times \vec{M}(\vec{r})$$

$$\sum_{k \in \text{no}} \phi_k = 0$$

$$\sum_k N_k I_k = \sum_k \mathcal{R}_k \phi_k$$

$$\mathcal{R}_k = \frac{I_k}{\mu S_k}$$