TÉCNICO LISBOA

3° teste

16 de Janeiro de 2014: 11h30

Duração do teste: 1h30

MECivil/LEGM

Eletromagnetismo e Ótica

1° semestre de 2013-14

Prof. Amaro Rica da Silva (Responsável)
Prof. Pedro Abreu
Prof. Rodrigo de Abreu
Mestre João Espadanal

Esta prova tem 2 páginas. Identifique claramente todas as folhas do exame.

[10.0] **1.** Uma onda electromagnética propaga-se num meio com permitividade elétrica relativa $\varepsilon_r = 3$, sendo o campo elétrico descrito pela expressão

$$\begin{cases} E_x = \frac{1}{2} E_0 \cos\left(\omega t - k\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)\right) \\ E_y = -\frac{\sqrt{3}}{2} E_0 \cos\left(\omega t - k\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)\right) \\ E_z = 0 \end{cases}$$

com frequência angular $\omega = \pi \times 10^{15}$ ~~Hz~~ (rad/s) e módulo $E_0 = 100$ V/m.

[2.0] a) determine no meio em que se propaga o seu índice de refração, a velocidade de propagação, o número de ondas k, e o comprimento de onda λ desta onda eletromagnética.

[3.0] b) determine a expressão das componentes do campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$, o vector de Poynting $\vec{\boldsymbol{S}}$, e a intensidade desta onda.

[3.0] c) suponha que no instante $t = 0$, esta onda incide no ponto $x = y = z = 0$ na superfície de separação do meio para o ar, sendo a normal à superfície dada pelo vector $\vec{\boldsymbol{n}} = -\vec{\boldsymbol{e}}_x$. Calcule o ângulo de incidência da onda e, comparando com os ângulos de Brewster e de reflexão total, indique justificando se existe onda reflectida e onda transmitida.

[2.0] d) Caso exista, calcule a intensidade da onda reflectida e da onda transmitida.

Fórmulas de Fresnel para ângulos de incidência $\theta_i \neq 0$ e de refração $\theta_t \neq 0$, sendo o índice P referente à polarização no plano de incidência e o índice S referente à polarização perpendicular ao plano de incidência:

$$\rho_P = \frac{\left(E_0^P\right)_r}{\left(E_0^P\right)_i} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \quad ; \quad \tau_P = \frac{\left(E_0^P\right)_t}{\left(E_0^P\right)_i} = \frac{2\sin\theta_t \cos\theta_i}{\cos(\theta_i - \theta_t)\sin(\theta_i + \theta_t)}$$

$$\rho_S = \frac{\left(E_0^S\right)_r}{\left(E_0^S\right)_i} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \quad ; \quad \tau_S = \frac{\left(E_0^S\right)_t}{\left(E_0^S\right)_i} = \frac{2\sin\theta_t \cos\theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$$

R: a) Índice de refracção : $n = \frac{c_o}{c} = \sqrt{\varepsilon_r\,\mu_r} \approx \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{3}$

Velocidade de Propagação: $c = \frac{c_o}{n} \approx \frac{3\;10^8}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\times 10^8\ \frac{m}{s}$

Número de ondas: $k = \frac{\omega}{c} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\times 10^7\ m^{-1}$

Comprimento de onda: $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi}\times 10^{-7}\ m$

R: b) Da relação $\vec{\boldsymbol{k}}\times\vec{\boldsymbol{E}} = \omega\,\vec{\boldsymbol{B}}$ válida para ondas planas, e de $\vec{\boldsymbol{k}} = k\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{e}}_y\right)$ obtém-se

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{\omega}\,\vec{\boldsymbol{k}}\times\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{k}{\omega}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{e}}_y\right)\times\left(E_x\vec{\boldsymbol{e}}_x + E_y\vec{\boldsymbol{e}}_y\right) = \frac{1}{c}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}E_y - \frac{1}{2}E_x\right)\vec{\boldsymbol{e}}_z = -\frac{E_o}{c}\cos\left(\omega t - \vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}\right)\vec{\boldsymbol{e}}_z$$

Para o vector de Poynting $\vec{\boldsymbol{S}} = \vec{\boldsymbol{E}}\times\vec{\boldsymbol{H}}$ tem-se, de $\vec{\boldsymbol{H}} = \frac{1}{\mu_o}\vec{\boldsymbol{B}}$,

$$\vec{\boldsymbol{S}} = E_o\cos\left(\omega t - \vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}\right)\left(\frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{e}}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\boldsymbol{e}}_y\right)\times\left(-\frac{E_o}{\mu_o\,c}\cos\left(\omega t - \vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}\right)\vec{\boldsymbol{e}}_z\right) = \frac{E_o^2}{\mu_o\,c}\cos^2\left(\omega t - \vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{e}}_y\right)$$

A intensidade é $I = \langle|\vec{\boldsymbol{S}}|\rangle$ donde, sabendo que $\mu_o = 4\pi\times 10^{-7}\ \frac{H}{m}$,

$$I = \frac{E_o^2}{\mu_o c}\left\langle\cos^2\left(\omega t - \vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}\right)\right\rangle = \frac{1}{2}\frac{E_o^2}{\mu_o c} = \frac{125}{\sqrt{3}\,\pi}\quad\frac{W}{m^2}$$

R: c) Ângulo de incidência : $\vec{\boldsymbol{k}}\cdot(-\vec{\boldsymbol{n}}) = k\cos\left(\theta_i\right) \quad\Longrightarrow\quad \theta_i = \arccos\left(-\frac{\vec{\boldsymbol{k}}}{k}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30^\circ$

Ângulo crítico de reflexão total: $n\sin\left(\theta_c\right) = 1 \quad\Longrightarrow\quad \theta_c = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 35^\circ$

Ângulo de Brewster: $n\sin\left(\theta_B\right) = \cos\left(\theta_B\right) \quad\Longrightarrow\quad \theta_B = \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30^\circ$

Como $\theta_i < \theta_c$, existe onda transmitida, mas dado que $\theta_i = \theta_B$ e a onda está linearmente polarizada com o campo elétrico paralelo ao plano de incidência (onda-p), não pode haver onda refletida.

R: d) Usando as formulas de Fresnel para uma onda-p, e dado que $\theta_t = \arcsin\left(n\sin\left(\theta_i\right)\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 60^\circ$, obtemos

$$\left(E_o^p\right)_t = \tau_p\left(E_o^p\right)_i = \frac{2\cos\left(\theta_i\right)\sin\left(\theta_t\right)}{\cos\left(\theta_i - \theta_t\right)\sin\left(\theta_i + \theta_t\right)}\,E_o = \frac{2\cos(30^\circ)\sin(60^\circ)}{\cos(-30^\circ)\sin(90^\circ)}\,E_o = \sqrt{3}\,E_o$$

A intensidade da onda transmitida é

$$I_t = \langle|\vec{\boldsymbol{S}}_t|\rangle = \frac{1}{\mu_o c_o}\frac{\left(\sqrt{3}\,E_o\right)^2}{2} = \frac{3}{n}\,I_i = \sqrt{3}\,I_i$$

Note que a transmitância é $T = 1$, como seria de esperar dado não existir onda refletida, porque a energia incidente sobre a superfície de separação é

$$I_i' = \langle\vec{\boldsymbol{S}}_i\cdot\left(-\vec{\boldsymbol{n}}\right)\rangle = I_i\cos\left(\theta_i\right) = I_i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

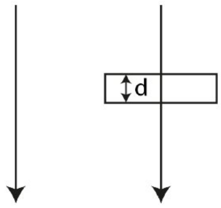
e a energia transmitida na superfície para o ar é

$$I_t' = \langle\vec{\boldsymbol{S}}_t\cdot\left(-\vec{\boldsymbol{n}}\right)\rangle = I_t\cos\left(\theta_t\right) = I_t\,\frac{1}{2}$$

donde

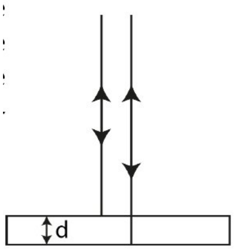
$$T = \frac{I_t'}{I_i'} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{I_t}{I_i} = 1$$

[10.0] **2.** Luz com comprimento de onda no ar $\lambda = 600$ nm incide perpendicularmente numa lâmina de vidro de espessura d e índice de refração $n = 2$ (considere o ar como tendo índice de refração $n_{ar} = 1$).



[2.0] a) Notando que se observa interferência destrutiva entre a onda que atravessa a lâmina e outra onda idêntica que passa ao lado da lâmina, calcule a espessura d da lâmina (parte de cima da figura à direita) (se não calcular esta espessura, pode usar o valor $d = 200$ nm na alínea seguinte).

[3.0] b) Nota-se agora que se observa interferência destrutiva entre uma onda de comprimento de onda desconhecido que reflecte na 1ª face da lâmina e uma onda idêntica que atravessa a lâmina e reflecte na 2ª face (parte de baixo da figura à direita). Calcule o comprimento de onda desta onda desconhecida (note que a lâmina está em contacto com o ar em ambas as faces).



(2.0) c) O cristalino no olho funciona como uma lente fortemente esférica, que foca as imagens na retina, uns 2 *cm* atrás do cristalino. O cristalino pode variar ligeiramente a distância focal, para que as imagens de objectos a distâncias diferentes sejam sempre focadas na retina.

[1.0] c.i) O ponto próximo do olho, normalmente a 25 *cm* do olho, corresponde à distância mínima do olho a que um objecto pode estar, para ainda ser visto com nitidez. Calcule a distância focal normal do olho neste caso (cristalino tenso).

[1.0] c.ii) O ponto distante do olho, corresponde à distância máxima do olho a que um objecto pode estar para ser visto com nitidez. Calcule a distância focal do olho neste caso (cristalino relaxado), para um olho normal (distância máxima muito elevada)

[3.0] d) Uma pessoa com vista cansada perde a capacidade de ver ao perto, isto é, o ponto próximo do olho vai-se afastando cada vez mais e, quando ultrapassa o tamanho do braço, a pessoa deixa de conseguir ler um livro que segure com as suas mãos; é altura de começar a usar óculos.

Suponha então que uma pessoa só consegue ler um texto que esteja a uma distância superior a 1 *m*. Calcule a distância focal das lentes dos óculos de ver ao pé, para que possa voltar a ler deitado na cama (isto é, voltar a poder segurar no livro a 25 *cm* dos olhos).
(Despreze a distância entre as lentes e o cristalino, bem como a espessura de ambos)

R: a) Enquanto a onda que atravessa a lâmina de espessura d, percorre uma distância efectiva (corrigida pelo índice de refração) $d' = n\,d$, a onda que passa ao lado da lâmina, percorre a distância efectiva d. Então a diferença de percurso entre as duas ondas é $n\,d - d$ que tem que ser igual a $\frac{\lambda}{2}$ para provocar a interferência destrutiva. Então o valor da espessura da lâmina é dado por

$$d = \frac{\lambda}{2(n-1)} = \frac{\lambda}{2} = 300\ nm$$

R: b) na mesma lâmina incidem agora duas ondas, uma das quais reflecte na face de cima, enquanto a outra reflecte na face de baixo. A onda de cima sofre uma transição de fase de 180° na reflexão, pois o índice de refração da lâmina, $n = 2$, é superior ao do ar, enquanto a onda que reflecte na face de baixo, não sofre essa transição de fase. Então, para haver interferência destrutiva, é preciso que a diferença de percurso (efectivo) seja $d.d.p. = \lambda$ (assumimos $m = 1$). Ora $d.d.p. = 2\ n\ d$ ($2\ d$ porque a onda vai e volta, n devido à correção da distância com o índice de refração). Então

$$\lambda = 2\,n\,d = 4\,\frac{\lambda}{2} = 2\,\lambda = 1200\ nm$$

R: c.i) a distância focal do cristalino é f dada pela solução da equação da lente (p distância do objeto à lente, q distância da imagem à lente):

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad \Longleftrightarrow \quad f = \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}$$

Ora, $p = 0.25; m$, a distância ao cristalino do ponto próximo do olho, e $q = 0.02\ m$, a distância da retina (onde queremos a imagem focada) ao cristalino. Temos então

$$f = \frac{1}{\frac{1}{0.25} + \frac{1}{0.02}} = \frac{1}{4 + 50} = \frac{1}{54}\ m\ = 1.85\ cm$$

R: c.ii) com o cristalino relaxado, em que p está praticamente no infinito, e a imagem se forma também na retina, $q = 0.02\ m$, temos a equação

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{0.02} = \frac{1}{f} \quad \Longleftrightarrow \quad f = 0.02\ m = 2\ cm$$

R: d) Se a pessoa já só vê bem os objectos a 1 m, quer dizer que para o ponto próximo (cristalino com a tensão máxima) temos a equação

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{0.02} = \frac{1}{f'}$$

em que f' é a nova distância focal mínima do cristalino. Para as lentes dos óculos, queremos poder ter o objecto a 25 cm das lentes (portanto $p'' = 0.25\ m$), e estas têm que formar a imagem à distância de 1 m à frente da lente (isto é, do mesmo lado do objecto), ficando então esta imagem a 1 m do olho (desprezando a distância entre os óculos e o cristalino), e podendo consequentemente ser focada numa imagem final na retina. Então, para os óculos, $q'' = -1\ m$ (imagem forma-se à frente da lente, do mesmo lado do objecto), e a equação da lente escreve-se

$$\frac{1}{0.25} + \frac{1}{-1} = \frac{1}{f''} \quad \Longleftrightarrow \quad f'' = \frac{1}{4 - 1} = \frac{1}{3}\ m\ = 33.3\ cm$$

Também se poderia utilizar a fórmula do sistema composto:

$$\frac{1}{0.25} + \frac{1}{0.02} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{f''} \quad \text{sabendo que} \quad \frac{1}{f'} = \frac{1}{1} + \frac{1}{0.02}$$

Teríamos então que

$$4 + 50 = \frac{1}{f'} + \frac{1}{f''} = 1 + 50 + \frac{1}{f''} \quad \Longleftrightarrow \quad 54 = 51 + \frac{1}{f''} \quad \Longleftrightarrow \quad f'' = \frac{1}{54 - 51} = \frac{1}{3}\ m$$