



Exame de EO

2ª Época

30 de Janeiro de 2014

11H30

Duração: 2H15

Electromagnetismo e Óptica

MEC/LEGM

1º semestre de 2013-2014

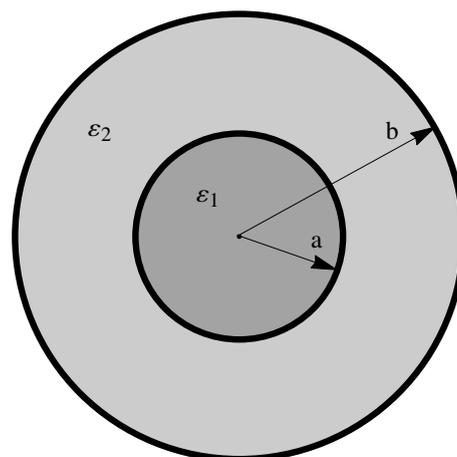
Prof. Amaro Rica da Silva
Prof. Rodrigo Abreu

Prof. Pedro Abreu
M. João Espadanal

- Inicie a resolução de cada Grupo numa nova página.
- Identifique claramente todas as folhas do teste e não as separe.
- O exame de 2ª Época consiste nos problemas 1+4+5. Indique de forma visível no cabeçalho da primeira página da sua prova que está a realizar o "EXAME".
- Para fazer a melhoria de nota dum teste deve entregar um conjunto de problemas 1+2 para o 1º Teste, 3+4 para o 2º Teste ou 5+6 para o 3º Teste. Escreva de forma visível no cabeçalho da primeira página da sua prova qual o "TESTE" que pretende melhorar.

Grupo I (Exame / 1º Teste)

Uma esfera dielétrica de raio $a = 10 \text{ cm}$ e permitividade $\epsilon_1 = 3 \epsilon_0$ está carregada uniformemente com carga $Q = -\frac{1}{9} \times 10^{-9} \text{ C}$. Está envolvido por uma armadura condutora de espessura desprezável e inserida no centro de outra esfera condutora ôca de raio $b = 50 \text{ cm}$. O espaço entre as duas armaduras condutoras está preenchido com dielétrico de permitividade $\epsilon_2 = 2 \epsilon_0$. Se fixarmos o potencial da armadura interior em $V_1 = 1 \text{ V}$ e o da armadura exterior em $V_2 = 4 \text{ V}$:



- [3.0] a) Determine o campo elétrico \vec{E} e o potencial φ dentro da esfera dielétrica uniformemente carregada.
- [2.0] b) Determine o potencial φ e o campo elétrico \vec{E} entre as armaduras e no espaço exterior (ar).
- [2.0] c) Determine a polarização \vec{P} e indique a localização e o valor das densidades de carga de polarização nos dielétricos.
- [3.0] d) Determine a capacidade do condensador e a carga total em cada uma das armaduras condutoras.

Grupo I (Solução)

R: a) Lei de Gauss para uma superfície esférica de raio $r < a$ concêntrica com a esfera dielétrica de raio a

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{int} \quad \Rightarrow \quad \epsilon_1 E_r(r) 4\pi r^2 = Q \frac{r^3}{a^3} \quad (r < a)$$

Campo elétrico dentro da esfera dielétrica carregada com carga $Q = -4\pi\epsilon_0(C) = -\frac{1}{3}4\pi\epsilon_1(C)$

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_1} \frac{r}{a^3} \vec{e}_r = -\frac{10^3}{3} r \vec{e}_r \quad \left(\frac{V}{m}\right) \quad (r < a)$$

Potencial associado dentro da esfera dielétrica carregada ($r \leq a$)

$$\varphi(r) = \varphi(a) - \int_a^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_1} \frac{r}{a^3} dr = V_1 + \frac{Q(a^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_1 a^3} = \frac{2}{3}(250r^2 - 1) \quad (V)$$

R: b) Solução preferida

O potencial exterior de uma distribuição de carga com simetria esférica é da forma $\varphi_i(r) = \frac{\alpha_i}{r}$ onde α_i é constante. O potencial no interior vazio duma distribuição superficial de carga é constante e igual ao potencial à superfície.

Entre as as armaduras o potencial total pode ser visto como a sobreposição $\varphi(r) = \frac{\alpha_1}{r} + \frac{\alpha_2}{b}$ dos potenciais de duas distribuições esféricas de cargas, uma dentro e à superfície duma esfera de raio a e outra numa casca esférica de raio b . De acordo com as condições fronteira em $a = \frac{1}{10}$, $\varphi(a) = V_1 = 1$ e em $b = \frac{1}{2}$, $\varphi(b) = V_2 = 4$, obtemos

$$\begin{cases} \varphi(a) = \frac{\alpha_1}{a} + \frac{\alpha_2}{b} = V_1 & (r = a) \\ \varphi(b) = \frac{\alpha_1}{b} + \frac{\alpha_2}{b} = V_2 & (r = b) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 = -\frac{3}{8} \\ \alpha_2 = \frac{19}{8} \end{cases}$$

No exterior das armaduras $\varphi(r) = \frac{\alpha_3}{r}$, e só a condição fronteira em $r = b$ é útil

$$\varphi(b) = \frac{\alpha_3}{b} = V_2 \quad (r = b) \quad \Rightarrow \quad \alpha_3 = 2$$

Assim, dado que $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(r)$, tem-se

$$\begin{cases} \varphi(r) = -\frac{3}{8r} + \frac{19}{4} & ; & \vec{E}_2(\vec{r}) = -\frac{3}{8r^2} \vec{e}_r & (a < r < b) \\ \varphi(r) = \frac{2}{r} & ; & \vec{E}_o(\vec{r}) = \frac{2}{r^2} \vec{e}_r & (b < r < \infty) \end{cases}$$

R: b) Solução alternativa

Usando a Lei de Gauss para uma esfera concêntrica de raio $a < r < b$ obtemos

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \epsilon_2 E_r(r) 4\pi r^2 = Q + Q'_1 \quad \Rightarrow \quad E_r(r) = \frac{Q + Q'_1}{4\pi\epsilon_2} \frac{1}{r^2} \quad (a < r < b)$$

onde Q'_1 é a carga de condução da armadura interior e Q a carga de condução no dielétrico interior. Daqui se deduz

$$\varphi(r) = \varphi(a) - \int_a^r E_r(r) dr = V_1 + \frac{Q + Q'_1}{4\pi\epsilon_2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right) \quad (a < r < b)$$

Para $r = b$, tendo em conta que $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_o$ e $4\pi\varepsilon_2(C) = -2Q$,

$$\varphi(b) = V_2 = V_1 + \frac{Q + Q'_1}{4\pi\varepsilon_2} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \quad \Rightarrow \quad Q'_1 = -\frac{1}{4}Q$$

Para $b < r < \infty$ a Lei de Gauss para uma esfera concêntrica de raio r produz

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \varepsilon_o E_r(r) 4\pi r^2 = Q + Q'_1 + Q'_2 \quad \Rightarrow \quad E_r(r) = \frac{Q + Q'_1 + Q'_2}{4\pi\varepsilon_o} \frac{1}{r^2} \quad (b < r < \infty)$$

onde Q'_2 é a carga de condução da armadura exterior, donde

$$\varphi(r) = \varphi(b) - \int_b^r E_r(r) dr = V_2 + \frac{Q + Q'_1 + Q'_2}{4\pi\varepsilon_o} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) \quad (b < r < \infty)$$

Para $r = \infty$

$$\varphi(\infty) = 0 = V_2 - \frac{Q + Q'_1 + Q'_2}{4\pi\varepsilon_o} \frac{1}{b} \quad \Rightarrow \quad Q'_2 = -\frac{11}{4}Q$$

Assim

$$\begin{cases} \varphi(r) = -\frac{3}{8r} + \frac{19}{4} & ; & \vec{E}_2(\vec{r}) = -\frac{3}{8r^2} \vec{e}_r & (a < r < b) \\ \varphi(r) = \frac{2}{r} & ; & \vec{E}_o(\vec{r}) = \frac{2}{r^2} \vec{e}_r & (b < r < \infty) \end{cases}$$

R: c) No dielétrico de permitividade $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_o$:

$$\vec{P}_1(\vec{r}) = (\varepsilon_1 - \varepsilon_o) \vec{E}_1(\vec{r}) = -\frac{2\varepsilon_o}{3} \times 10^3 r \vec{e}_r$$

Densidade de carga de polarização à superfície $r = a$:

$$\sigma_{1_p}(a) = \vec{P}_1(a) \cdot \vec{e}_r = -\frac{2\varepsilon_o}{3} \times 10^2 = -\frac{5}{27\pi} \times 10^{-8} \quad \left(\frac{C}{m^2} \right)$$

Densidade volúmica de carga de polarização:

$$\rho_{1_p}(\vec{r}) = -\nabla \cdot \vec{P}_1(\vec{r}) = -\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_o)}{\varepsilon_1} \nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = -\frac{2}{3} \rho_c(\vec{r}) = 2\varepsilon_o \times 10^3 = \frac{5}{9\pi} \times 10^{-7} \quad \left(\frac{C}{m^3} \right)$$

No dielétrico de permitividade $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_o$ entre as armaduras :

$$\vec{P}_2(\vec{r}) = (\varepsilon_2 - \varepsilon_o) \vec{E}_2(\vec{r}) = -\frac{3\varepsilon_o}{8r^2} \vec{e}_r$$

Densidade de carga de polarização nas superfícies interna $r = a$ e externa $r = b$ do dielétrico

$$\sigma_{2_p}(a) = \vec{P}_2(a) \cdot (-\vec{e}_r) = \frac{3\varepsilon_o}{8a^2} = \frac{5}{48\pi} \times 10^{-8} \quad \left(\frac{C}{m^2} \right)$$

$$\sigma_{2_p}(b) = \vec{P}_2(b) \cdot \vec{e}_r = -\frac{3\varepsilon_o}{8b^2} = -\frac{5}{12\pi} \times 10^{-10} \quad \left(\frac{C}{m^2} \right)$$

Não existe densidade volúmica de carga de polarização aqui porque este dielétrico está descarregado.

R: d) A capacidade de um condensador esférico com carga Q_1 e raios a e b e dielétrico de permitividade $\epsilon_2 = 2 \epsilon_o$ é

$$C = \frac{Q_1}{\varphi(a) - \varphi(b)} = \frac{Q_1}{\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} = \frac{4\pi\epsilon_2 ab}{b-a} = \pi\epsilon_o$$

A carga na armadura interna de raio a deve assim ser ¹

$$Q_1 = C(V_1 - V_2) = -3\pi\epsilon_o = \frac{3}{4} Q$$

Esta carga inclui a carga Q induzida pela esfera dielétrica na **face exterior** da armadura interna mais a **carga própria** Q'_1 dessa armadura, pelo que ²

$$Q'_1 = Q_1 - Q = \left(\frac{3}{4} - 1\right)Q = -\frac{1}{4}Q$$

A carga própria Q'_2 da armadura **exterior** pode ser calculada usando a Lei de Gauss para o campo exterior às esferas. Assim sabemos que

$$\epsilon_o E_o(r) 4\pi r^2 \equiv 8\pi\epsilon_o = Q + Q'_1 + Q'_2$$

Mas dado que $8\pi\epsilon_o(C) = -2Q$, obtemos

$$Q'_2 = -3Q - Q'_1 = \left(-3 + \frac{1}{4}\right)Q = -\frac{11}{4}Q$$

Nota ¹) Estas cargas estariam já determinadas se usasse a solução alternativa da alínea **b**).

Nota ²) Este resultado também poderia ser obtido usando a Lei de Gauss para o campo entre armaduras. De facto

$$\epsilon_2 E_2(r) 4\pi r^2 \equiv -\frac{3}{8} 4\pi\epsilon_2 = Q_1 \equiv Q + Q'_1$$

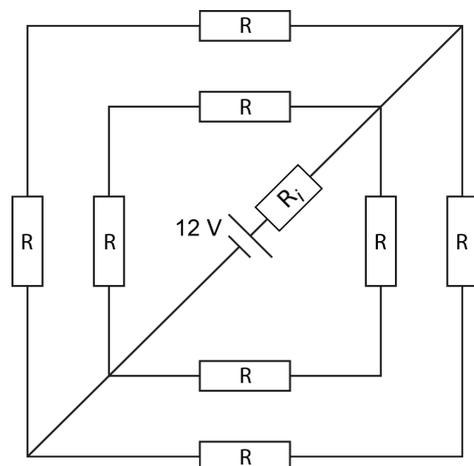
Como $4\pi\epsilon_2(C) = 8\pi\epsilon_o(C) = -2Q$ obtemos

$$\frac{3}{4} Q = Q + Q'_1 \quad \Rightarrow \quad Q'_1 = \left(\frac{3}{4} - 1\right)Q = -\frac{1}{4}Q$$

Grupo II (1º Teste)

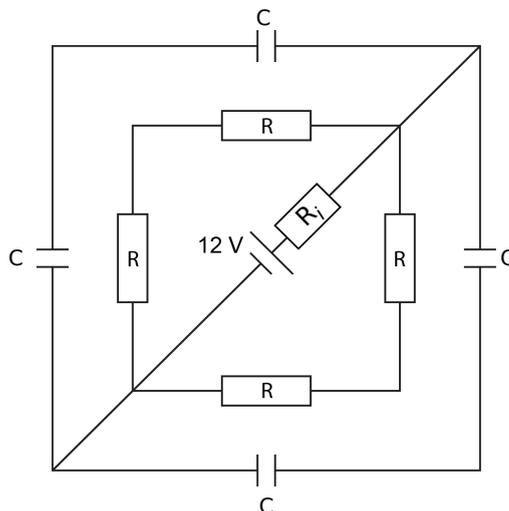
No circuito da figura ao lado, todas as resistências são iguais e de valor $R = 100 \Omega$, os fios têm resistência desprezável e a bateria tem resistência interna $R_i = 1 \Omega$.

[3.0] a) Calcule a magnitude e o sentido das correntes em todos os ramos do circuito.



O circuito da figura da direita é o mesmo que o da figura anterior, mas em que as resistências exteriores foram substituídas por condensadores de capacidade $C = 1 \text{ nF}$ (10^{-9} F), todos iguais.

- [2.0] b) Calcule as correntes em todos os ramos do circuito no instante inicial em que os condensadores estão descarregados.
- [2.0] c) Calcule as correntes em todos os ramos do circuito no estado estacionário (ou seja quando os condensadores estão completamente carregados).
- [3.0] d) Calcule as cargas máximas acumuladas nos condensadores neste estado final.



Grupo II (Solução)

R: a) O circuito mostra uma fonte de tensão $V = 12 \text{ (V)}$ com resistência interna $R_i = 1 \text{ (}\Omega\text{)}$ em série com uma resistência R_{eq} equivalente a 4 resistências $2R$ em paralelo:

$$R_{eq} = \left(\frac{4}{2R} \right)^{-1} = \frac{R}{2} = 50 \text{ (}\Omega\text{)}$$

A corrente I_o que atravessa a bateria é

$$I_o = \frac{V}{R_i + R_{eq}} = \frac{12}{51} \approx 0.24 \text{ (A)}$$

As correntes I_1 a I_4 que atravessam as resistências são iguais entre si e de acordo a lei dos nós de Kirchoff devem ser iguais a $\frac{1}{4}I_o$.

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = \frac{1}{4} I_o = \frac{3}{51} \approx 0.06 \text{ (A)}$$

R: b) No instante inicial em que os condensadores estão descarregados, estes não apresentam resistência nenhuma, e em paralelo com os ramos resistivos constituem um curto-circuito às resistências. Toda a corrente $I_o = \frac{V}{R_i} = 12 \text{ (A)}$ divide-se igualmente para passar pelos condensadores

$$I_2 = I_3 = \frac{1}{2} I_o = 6 \text{ (A)}$$

e nenhuma passa pelas resistências

$$I_1 = I_4 = 0$$

R: c) Quando os condensadores estão completamente carregados não pode passar corrente através deles, pelo que $I_2 = I_3 = 0$, e toda a corrente

$$I_o = \frac{V}{R_i + R'_{eq}} = \frac{12}{101} \approx 0.12 \text{ (A)}$$

onde $R'_{eq} = \left(\frac{2}{2R} \right)^{-1} = R$, passa nos ramos resistivos em paralelo com correntes

$$I_1 = I_4 = \frac{1}{2} I_o = \frac{6}{101} \approx 0.06 \text{ (A)}$$

R: d) A queda de tensão através de cada série de condensadores carregados é igual a

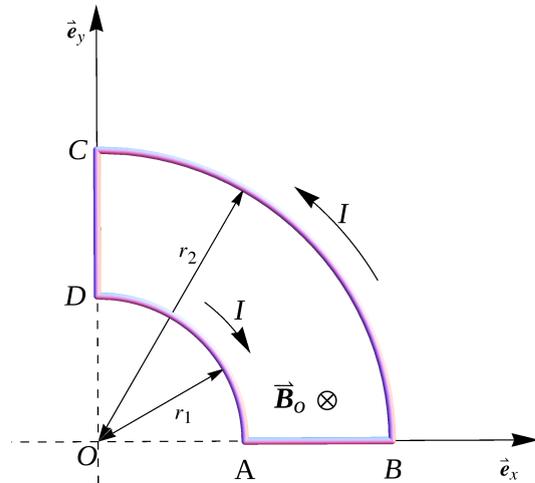
$$V' = 2RI_1 = \frac{1200}{101} \approx 12 \text{ (V)}$$

pelo que a carga deve ser

$$Q = C_{eq} V' = \left(\frac{2}{C}\right)^{-1} V' = \frac{C}{2} V' = \frac{600}{101} \times 10^{-9} \approx 6 \text{ (nC)}$$

Grupo III (2º Teste)

Uma espira condutora com corrente I tem a forma indicada na figura, com os lados AD e BC em forma de arco circular de raios r_1 e r_2 respectivamente. A espira está imersa num campo magnético exterior \vec{B}_o homogêneo e perpendicular ao plano da espira como indicado,

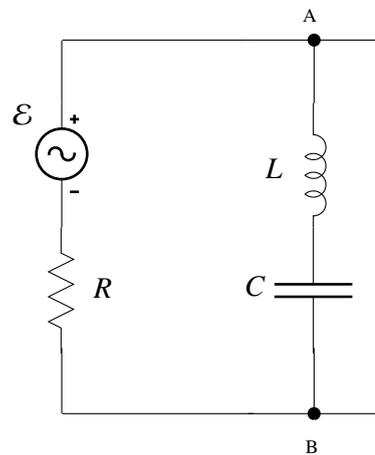


[2.0] a) Determine o campo magnético \vec{B}_e gerado pela corrente da espira na origem O .

[2.0] b) Determine a força sobre cada lado da espira.⁽¹⁾

[1.0] c) Determine a força total sobre a espira.

Considere o circuito representado na figura ao lado. Assumindo que a fonte de tensão à entrada $V_e(t)$ é sinusoidal de frequência ω determine:



[2.0] d) A impedância Z do circuito e a corrente $I(t)$. Qual é a frequência de ressonância deste circuito?

[3.0] e) Determine a tensão $V_{AB}(t)$ e a sua fase relativamente à tensão da fonte. Explique como se comporta $V_{AB}(t)$ em função da frequência ω .

Grupo III (Solução)

R: a) De acordo com a Lei de Biot-Savart para $\vec{r} = 0$,

$$d\vec{B}(0) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times (-\vec{l})}{|\vec{l}|^3}$$

as contribuições dos segmentos de corrente em AB e CD para o campo aí são nulas porque $d\vec{l}$ é paralelo a \vec{l} .

¹ Note que em coordenadas cartesianas $\vec{e}_r(\theta) = \cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y$ e $\vec{e}_\theta(\theta) = -\sin(\theta)\vec{e}_x + \cos(\theta)\vec{e}_y$.

A contribuição do arco BC é

$$\vec{B}_{BC}(0) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{I r_2 d\theta \vec{e}_\theta \times (-r_2 \vec{e}_r)}{r_2^3} = \frac{\mu_o I}{4\pi r_2} \int_0^{\pi/2} d\theta \vec{e}_z = \frac{\mu_o I}{8 r_2} \vec{e}_z$$

A contribuição do arco DA é idêntica, com o sinal trocado e r_1 em vez de r_2

$$\vec{B}_{DA}(0) = -\frac{\mu_o I}{8 r_1} \vec{e}_z$$

pelo que

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_o I}{8} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \vec{e}_z$$

R: b) A força sobre o lado AB é

$$\vec{F}_{AB} = \int_{AB} I d\vec{l} \times \vec{B}_o = I \int_{r_1}^{r_2} dx \vec{e}_x \times (-B_o \vec{e}_z) = I(r_2 - r_1) B_o \vec{e}_y$$

De forma similar a força sobre o lado CD é

$$\vec{F}_{CD} = \int_{CD} I d\vec{l} \times \vec{B}_o = I \int_{r_2}^{r_1} dy \vec{e}_y \times (-B_o \vec{e}_z) = I(r_2 - r_1) B_o \vec{e}_x$$

Sobre o lado DA

$$\vec{F}_{DA} = \int_{DA} I d\vec{l} \times \vec{B}_o = I \int_{\pi/2}^0 r_1 d\theta \vec{e}_\theta \times (-B_o \vec{e}_z) = I r_1 B_o \int_0^{\pi/2} \vec{e}_r(\theta) d\theta$$

Relembrando que $\vec{e}_r(\theta) = \cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y$, podemos ver que

$$\vec{F}_{DA} = I r_1 B_o \int_0^{\pi/2} (\cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y) d\theta = I r_1 B_o [\sin(\theta) \vec{e}_x - \cos(\theta) \vec{e}_y]_0^{\pi/2} = I r_1 B_o (\vec{e}_x + \vec{e}_y)$$

De forma análoga se deduz que

$$\vec{F}_{BC} = -I r_2 B_o (\vec{e}_x + \vec{e}_y)$$

R: c) A força total sobre um circuito de corrente num campo magnético \vec{B}_o homogêneo e estacionário é sempre nula porque $\oint d\vec{l} \equiv 0$ donde

$$\vec{F}_{tot} = \oint I d\vec{l} \times \vec{B}_o = I \left(\oint d\vec{l} \right) \times \vec{B}_o \equiv 0$$

Este resultado é confirmado pela soma das forças calculadas na alínea anterior

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BC} + \vec{F}_{CD} + \vec{F}_{DA} = 0$$

R: d) A impedância complexa do circuito RLC para uma tensão aplicada sinusoidal $V_e(t) = V_o e^{i\omega t}$ é

$$Z = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = R + i (X_L - X_C)$$

onde X_L e X_C são as reactâncias indutiva e capacitiva, respectivamente.

A corrente na representação complexa é

$$I(t) = \frac{V_e(t)}{Z} = \frac{V_o}{|Z|} e^{i(\omega t - \phi)}$$

onde $|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ e $\phi = \arctan \left(\frac{X_L - X_C}{R} \right)$.

A frequência de ressonância é a frequência ω_r que minimiza a impedância Z , ou seja quando

$$X_L - X_C = \omega_r L - \frac{1}{\omega_r C} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

R: e) A tensão entre AB é

$$V_{AB}(t) = i (X_L - X_C) I(t) = \frac{|X_L - X_C| V_o}{|Z|} e^{i(\omega t - \phi \pm \pi/2)}$$

onde $\pm \pi/2 = \arg(i (X_L - X_C))$.

Em termos da frequência, a tensão $V_{AB}(t)$ tende a reproduzir a tensão de entrada $V_e(t)$ tanto para baixas como para altas frequências porque

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{|X_L - X_C|}{|Z|} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{|X_L - X_C|}{|Z|} = 1$$

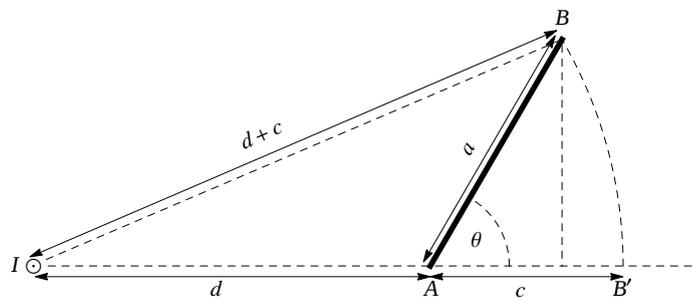
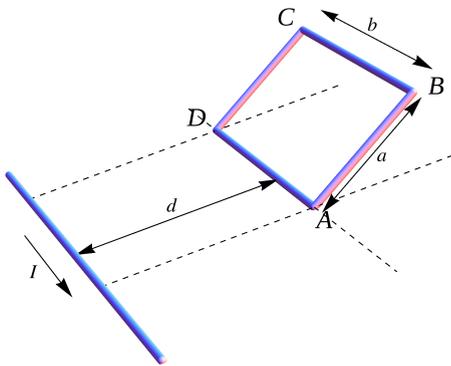
enquanto na vizinhança de ω_r , a tensão à saída é muito mais fraca porque

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_r} \frac{|X_L - X_C|}{|Z|} = 0$$

O circuito funciona assim com um filtro rejeita-banda.

Grupo IV (Exame / 2º Teste)

Um fio rectilíneo comprido é percorrido por uma corrente I que dá origem a um campo magnético \vec{B} . Uma espira rectangular $ABCD$, de largura a e comprimento b , executa f rotações por segundo em torno do lado AD , paralelo ao fio e à distância d deste. A espira é feita de um material de condutividade σ_e e secção S .



- [3.0] a) Mostre que o fluxo do campo magnético \vec{B} através da espira é igual ao fluxo através do rectângulo $AB'C'D$, de largura c e comprimento b , que resulta de rodar BC em torno do fio de corrente I até $B'C'$ no plano definido pelo fio e pelo lado fixo AD (ver figura). Determine assim o fluxo de \vec{B} através da espira num instante qualquer t .
- [2.0] b) Determine a força electromotriz induzida na espira e a corrente $I_i(t)$ resultante. Explique como se comporta o sentido da corrente em função do tempo.

Um tubo condutor cilíndrico de raio R e comprimento $L \gg R$, é percorrido por uma corrente I resultante de uma tensão V aplicada entre as suas extremidades. Sabendo que a sua condutividade é σ_c e a permeabilidade magnética é μ ,

- [3.0] c) Na aproximação de um condutor rectilíneo infinito, escreva as expressões para o campo \vec{B} em todas as regiões na vizinhança e dentro do tubo. Explique os seus resultados.

- [2.0] d) Determine a magnetização \vec{M} e as densidades de correntes de magnetização \vec{J}_m e \vec{J}_{m_s} , respectivamente dentro e na superfície do condutor.

Grupo IV (Solução)

R: a) Como o fluxo do campo magnético através de qualquer **superfície fechada** é necessariamente **zero** porque $\nabla \cdot \vec{B} \equiv 0$, o fluxo através de qualquer **superfície aberta** com o **bordo ABCD** é **sempre o mesmo** porque com duas superfícies diferentes destas se pode formar uma superfície fechada, pelo que o fluxo através de cada deve ser igual em magnitude (e de sinal oposto com a devida orientação para formar uma superfície fechada). Assim o fluxo através da superfície formada

- pelo rectângulo plano $AB'C'D$,
- o segmento de superfície cilíndrica $BB'C'C$, de raio $d + c$,
- e as bases planas ABB' e DCC'

é idêntico ao fluxo através da espira com o mesmo bordo $ABCD$. Mas o campo \vec{B} gerado pela corrente I é **tangente** à superfície cilíndrica $BB'C'C$ e às bases planas ABB' e DCC' , resultando em fluxo nulo aí, pelo que o fluxo total se reduz ao rectângulo plano $AB'C'D$.

Colocando \vec{e}_z coincidente com o fio infinito e na direcção da corrente I temos, no rectângulo plano $AB'C'D$, $\vec{B} = B_\theta(r)\vec{e}_\theta(0) = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \vec{e}_\theta(0)$ pela Lei de Ampère e $d\vec{S} = -drdz\vec{e}_\theta(0)$, donde

$$\Phi_m(\theta) = \iint_{AB'C'D} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_0^b \int_d^{d+c} B_\theta(r) dr dz = \frac{\mu_o I}{2\pi} \log\left(\frac{d+c}{d}\right)$$

em que a distância $d + c$ é definida como

$$d + c = |d\vec{e}_r(0) + a\vec{e}_r(\theta)| = \sqrt{d^2 + a^2 + 2ad \cos(\theta)}$$

Quando $\theta = \omega t = 2\pi ft$,

$$\Phi_m(t) = \frac{\mu_o I}{2\pi} \log\left(\frac{\sqrt{d^2 + a^2 + 2ad \cos(\omega t)}}{d}\right) = \frac{\mu_o I}{4\pi} \log\left(\frac{d^2 + a^2 + 2ad \cos(\omega t)}{d^2}\right)$$

R: b) Pela lei de Faraday-Lenz a força electromotriz induzida será

$$\mathcal{E}_{em}(t) = -\frac{d\Phi_m(t)}{dt} = -\frac{\mu_o I}{4\pi} \left(-\frac{2ad\omega \sin(\omega t)}{d^2 + a^2 + 2ad \cos(\omega t)} \right) = \frac{\mu_o I a d \omega \sin(\omega t)}{2\pi (d^2 + a^2 + 2ad \cos(\omega t))}$$

A resistência da espira é $R = \frac{l}{\sigma_e S} = \frac{2(a+b)}{\sigma_e S}$, pelo que a corrente induzida é

$$I_i(t) = \frac{\mathcal{E}_{em}(t)}{R} = \frac{\mu_o \sigma_e S I a d \omega \sin(\omega t)}{4\pi (a+b) (d^2 + a^2 + 2ad \cos(\omega t))}$$

A corrente é alterna (mas não sinusoidal), mudando de positiva (no sentido $ABCD$) para negativa (no sentido $ADCB$) com o sinal e periodicidade de $\sin(\omega t)$.

R: c) A resistência total é $R_c = \frac{L}{\sigma_e \pi R^2}$, pelo que a corrente deve ser $I = \frac{V}{R_c} = \sigma_e \pi R^2 \frac{V}{L}$.

Fora do condutor, e para distâncias r , $|z| \ll L$, pode-se usar a Lei de Ampère e obter, fazendo \vec{e}_z coincidir com o eixo do condutor no sentido da corrente I ,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_\theta(r) 2\pi r = \mu_o I \quad \Rightarrow \quad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \vec{e}_\theta(\theta) \quad (T) \quad (R < r \ll L)$$

Dentro do condutor, para $0 \leq r \leq R$, a Lei de Ampère generalizada com $H_\theta(r) = \frac{B_\theta(r)}{\mu}$ determina

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_\theta(r) 2\pi r = \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu I r}{2\pi R^2} \vec{e}_\theta(\theta) \quad (T) \quad (0 \leq r \leq R)$$

R: d) A magnetização dentro do condutor será

$$\vec{M} = \frac{\mu - \mu_o}{\mu_o} \vec{H} \quad \Rightarrow \quad \vec{M}(\vec{r}) = \frac{\mu - \mu_o}{\mu_o} \frac{I r}{2\pi R^2} \vec{e}_\theta(\theta)$$

A densidade de corrente de magnetização superficial é

$$\vec{J}_{m_s}(R) = \vec{M}(\vec{r}) \times \vec{e}_r(\theta) = \frac{\mu - \mu_o}{\mu_o} \frac{I}{2\pi R} \vec{e}_\theta(\theta) \times \vec{e}_r(\theta) = -\frac{\mu - \mu_o}{\mu_o} \frac{I}{2\pi R} \vec{e}_z$$

e dentro do condutor, tendo em conta que $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c$ (Lei de Ampère infinitesimal),

$$\vec{J}_m(\vec{r}) = \nabla \times \vec{M}(\vec{r}) = \frac{\mu - \mu_o}{\mu_o} \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \frac{\mu - \mu_o}{\mu_o} \vec{J}_c(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \vec{J}_m(\vec{r}) = \frac{\mu - \mu_o}{\mu_o} \frac{I}{\pi R^2} \vec{e}_z$$

Grupo V (Exame / 3º Teste)

Uma onda electromagnética propaga-se num meio com permitividade eléctrica relativa $\epsilon_r = 2$, sendo o campo magnético descrito pela expressão indicada ao lado, com $|\vec{k}| = k = \sqrt{2} \times 10^7 \text{ m}^{-1}$, $\beta > 0$ e $B_0 = \sqrt{2} \times 10^{-6} \text{ T}$.

$$\begin{cases} B_x = \frac{\sqrt{3}}{2} B_0 \cos(\omega t - k(\alpha x + \beta y)) \\ B_y = \frac{1}{2} B_0 \cos(\omega t - k(\alpha x + \beta y)) \\ B_z = 0 \end{cases}$$

- [3.0] a) Determine no meio em que a onda se propaga, a velocidade de propagação, a frequência ω e o comprimento de onda λ . Calcule os coeficientes α e β e indique o sentido e direcção da propagação da onda.
- [3.0] b) Determine a expressão das componentes do campo eléctrico \vec{E} e do vector de Poynting \vec{S} .
- [2.0] c) Suponha que esta onda incide numa superfície de separação do meio para o ar, sendo a normal à superfície dada pelo vector $\vec{n} = -\vec{e}_x$. Calcule o ângulo de incidência da onda, e determine justificando se existe onda reflectida e transmitida.
- [2.0] d) Calcule as intensidades das ondas incidente, reflectida e transmitida. Justifique a sua resposta.

Grupo V (Solução)

R: a) O índice de refração do meio é $n = \frac{c_o}{c} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \approx \sqrt{\epsilon_r}$ (para meios não-magnéticos $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_o} \approx 1$). Assim a velocidade de propagação da onda electromagnética neste meio é, usando c_o para a velocidade da luz no vazio,

$$c = \frac{c_o}{n} = \frac{3}{\sqrt{2}} \times 10^8 \left(\frac{m}{s} \right)$$

Pela relação de dispersão para ondas planas $\omega = ck$, donde

$$\omega = \frac{c_o}{n} k = 3 \times 10^{15} \left(\frac{rad}{s} \right)$$

O comprimento de onda λ está relacionado com o número de ondas $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ donde

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \sqrt{2}\pi \times 10^{-7} (m)$$

Uma vez que $k(\alpha x + \beta y) = \vec{k} \cdot \vec{r}$ para qualquer \vec{r} , e $k = |\vec{k}|$, podemos concluir que $\vec{k} = k(\alpha \vec{e}_x + \beta \vec{e}_y)$. Como sabemos que \vec{k} tem que ser ortogonal a \vec{E} e \vec{B} numa onda plana devemos ter

$$\vec{k} \cdot \vec{B} = k B_o \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \alpha + \frac{1}{2} \beta \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}} \beta$$

Por outro lado $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ donde

$$\frac{\beta^2}{3} + \beta^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ou seja, $\alpha = -\frac{1}{2} = \cos(120^\circ)$ e $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(120^\circ)$. A onda propaga-se na direcção definida por

$$\frac{\vec{k}}{k} = -\frac{1}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_y$$

R: b) O campo eléctrico \vec{E} deve ser perpendicular tanto a \vec{k} como a \vec{B} numa onda plana. Como \vec{k} e \vec{B} pertencem ambos ao plano xy , \vec{E} deve ser perpendicular a este plano, ou seja dirigido na vertical e proporcional a \vec{e}_z . Da relação $\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}$ devemos ter

$$E_z = \frac{\omega}{k} B_o \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = c B_o \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

ou relembrando a relação algébrica $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$,

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = \omega \vec{k} \times \vec{B}$$

e desenvolvendo, tendo em conta que $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$,

$$-k^2 \vec{E} = \omega k B_o \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \left(-\frac{1}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_y \right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_x + \frac{1}{2} \vec{e}_y \right)$$

ou seja

$$\vec{E} = c B_o \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \vec{e}_z$$

O vector de Poynting é

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{c}{\mu} B_o^2 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})^2 \left(-\frac{1}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_y \right)$$

R: c) Pela direcção do vector \vec{k} e do vector \vec{n} podemos determinar que

$$\cos(\theta_i) = -\frac{\vec{k} \cdot \vec{e}_x}{k} = \frac{1}{2}$$

pelo que o ângulo de incidência é $\theta_i = 60^\circ$. O ângulo crítico acontece quando $\theta_i = \frac{\pi}{2}$, ou seja pela lei de Snell para a refração dum meio de índice $n = \sqrt{2}$ para o ar ($n_{ar} = 1$)

$$\sqrt{2} \sin(\theta_c) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta_c = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45^\circ$$

Assim sendo o ângulo de incidência é maior que o ângulo crítico e a onda é completamente reflectida de volta para o meio de origem e não existe onda transmitida (existem campos evanescentes ao longo da superfície de separação dos meios).

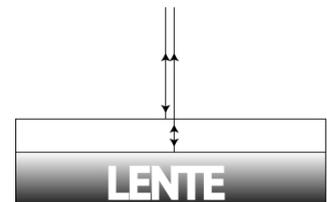
R: d) A onda incidente é uma onda-s porque o campo eléctrico é perpendicular ao plano de incidência formado por \vec{k} e \vec{n} . A intensidade da onda reflectida será igual à da onda incidente, e esta é, assumindo $\mu \approx \mu_o$,

$$I_i = \langle |\vec{S}_i| \rangle = \frac{1}{2} \frac{c}{\mu} B_o^2 = \frac{1}{2} \frac{c_o}{n \mu_o} B_o^2 = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{1}{4\pi} \times 10^3 \left(\frac{W}{m^2} \right)$$

Grupo VI (3º Teste)

Uma película de fluoreto de magnésio com índice de refração $n_M = 1.3$ e espessura $d = 10^{-7} m$ cobre a lente objetiva de uma máquina fotográfica (lente com índice de refração $n_L = 1.5$. Luz incide perpendicularmente à lente e é em parte reflectida logo na película, enquanto parte atravessa a película e é reflectida na lente (e parte desta será transmitida), conforme figura (topo).

- [1.0] a) Determine a relação entre o comprimento de onda no ar e o comprimento de onda na película para qualquer onda plana monocromática incidente.
- [3.0] b) Calcule os comprimentos de onda para os quais a intensidade no ar da onda reflectida pelo conjunto película+lente é, respectivamente, máxima e mínima.



A luz que passa a lente delgada da máquina fotográfica é focada no plano onde está o captor CCD (o plano dos píxeis ou o filme fotográfico nas máquinas antigas). Suponha que a lente está a $\frac{1}{9} m$ do plano do CCD, quando se fotografa um objecto a $1 m$ da lente.

- [2.0] c) Calcule a distância focal da lente. Trata-se de uma lente convergente ou divergente?
- [1.0] d) Calcule a nova distância a que tem que estar a lente do plano do CCD para tirar uma fotografia tipo paisagem (objecto muito longe).

- [1.0] e) Admitindo que a distância máxima da lente ao plano do CCD é de 0.125 m , calcule a distância mínima a que pode estar um objecto da lente para ainda se obter uma imagem nítida.
- [2.0] f) Admitindo que se trata de uma lente plano-convexa (um lado plano, outro lado convexo), calcule o raio de curvatura do lado convexo.

Grupo VI (Solução)

R: a) Como a frequência temporal de oscilação ω é igual nos dois meios, usando a relação de dispersão $ck = \omega$ entre esta, a velocidade da luz no meio e o número de ondas, obtém-se

$$\omega = c_o k = c k'$$

onde $n_M = \frac{c_o}{c} = 1.3$, pelo que

$$k' = \frac{c_o}{c} k = n_M k \quad \implies \quad k' = n_M k$$

Como $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ obtém-se a relação entre os comprimentos de onda requerida

$$\lambda' = \frac{1}{n_M} \lambda$$

R: b) Para haver interferência **construtiva** (máxima) entre a onda reflectida na película e a onda reflectida na lente a diferença de fase entre as duas deve ser múltipla de 2π . Em primeira ordem, uma vez que assumimos que $d < \lambda$, e tendo em conta que quando há reflexão do lado menos denso da superfície separação para um meio mais denso deve existir uma inversão de fase (o que acontece em ambas as reflexões envolvidas) obtemos o desfasamento

$$2k'd = 2\pi \quad \iff \quad \lambda' = 2d \quad \implies \quad \lambda = 2n_M d = 2.6 \times 10^{-7} \text{ m}$$

Para a interferência **destrutiva** (mínima) a diferença de fase entre as ondas reflectidas é em primeira ordem $\Delta\phi = \pi$, donde pela mesma lógica

$$2k'd = \pi \quad \iff \quad \lambda' = 4d \quad \implies \quad \lambda = 4n_M d = 5.2 \times 10^{-7} \text{ m}$$

(Sol. Alt. 1) Como a reflexão na separação ar-película provoca uma diferença de fase de 180° (pois $n_M = 1.3 > n_a r = 1$) e a reflexão na separação película-lente também ($n_L = 1.5 > n_M$), então a diferença de fase é simplesmente dada pela diferença de percurso (efectiva). Isto é,

$$d.d.p. = 2n_M d = 2.6 \times 10^{-7} \text{ m}$$

Teremos interferência máxima se $d.d.p. = j\lambda$, e interferência mínima se $d.d.p. = (j - \frac{1}{2})\lambda$, onde $j = 1, 2, \dots$. Logo, para a interferência máxima e mínima, temos os valores de λ respetivamente dados por

$$\lambda_{max} = \frac{2.6 \times 10^{-7}}{j} \text{ m} \quad ; \quad \lambda_{min} = \frac{2.6 \times 10^{-7}}{(j - \frac{1}{2})} \text{ m}$$

(Sol. Alt. 2) No instante $t = t_o$ a onda de comprimento de onda λ incide num ponto \vec{r}_o da película com uma fase

$$\phi_o = \omega t_o - \vec{k} \cdot \vec{r}_o$$

e é parcialmente transmitida para dentro da película e reflectida de volta para o ar.

Dentro da película a onda propaga-se com velocidade $c = \frac{c_o}{n_M}$ e ao fim de um tempo

$$\delta t = \frac{2d}{c} = \frac{2n_M d}{c_o}$$

o plano de fase

$$\phi_o + \pi = \omega t_o - \vec{k} \cdot \vec{r}_o + \pi$$

(incluindo a inversão de fase devido à reflexão na lente) da onda volta a sair para o ar no mesmo ponto \vec{r}_o .

Contudo durante esse tempo a fase da onda reflectida na superfície da película mudou para

$$\phi_1 + \pi = \omega(t_o + \delta t) - \vec{k} \cdot \vec{r}_o + \pi$$

(também incluindo a inversão de fase devido à reflexão na película) pelo que agora a diferença de fases entre as duas ondas reflectidas é

$$\phi_1 + \pi - (\phi_o + \pi) = \omega \delta t = \omega \frac{2n_M d}{c_o} = 2k n_M d = \frac{4\pi n_M d}{\lambda}$$

Para haver interferência **construtiva** (máxima) temos que ter $\phi - \phi_o = 2\pi j$ com $j = 1, 2, \dots$, ou seja

$$4\pi n_M d = 2\pi j \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2n_M d}{j}$$

Para haver interferência **destrutiva** (mínima) temos que ter $\phi - \phi_o = (2j - 1)\pi$ com $j = 1, 2, \dots$, ou seja

$$4\pi n_M d = (2j - 1)\pi \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{4n_M d}{(2j - 1)}$$

Com $j = 1$ recuperamos os resultados de primeira ordem, quando $d < \lambda$. Contudo, para a luz visível $4 \times 10^{-7} m < \lambda < 7 \times 10^{-7} m$ por isso com $j = 1$

$$\begin{cases} \lambda_{max} = 2n_M d = 2.6 \times 10^{-7} m & \text{interferência construtiva} \\ \lambda_{min} = 4n_M d = 5.2 \times 10^{-7} m & \text{interferência destrutiva} \end{cases}$$

Vemos assim que com luz visível só temos a possibilidade de uma interferência destrutiva de primeira ordem. Para ordens mais altas todos os comprimentos de onda são infravermelhos.

R: c) Usando a equação das lentes finas

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad f = 10 \text{ cm} \quad (\text{convergente})$$

R: d) Para objetos distantes $p \approx \infty$ e

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad q = f = 10 \text{ cm}$$

R: e) Para a máxima distância $q_{\max} = 12.5 \text{ cm}$ e a distância mínima para o objecto será p_{\min}

$$\frac{1}{p_{\min}} + \frac{1}{q_{\max}} = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad p_{\min} = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{q_{\max}} \right)^{-1} = \left(10 - \frac{1000}{125} \right)^{-1} = \frac{125}{250} \approx 0.5 \text{ m}$$

R: f) De acordo com a equação

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_{\text{lente}}}{n_{\text{ar}}} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

a parte plana da lente tem raio de curvatura $R_2 = \infty$ donde

$$R_1 = \left(\frac{n_{\text{lente}}}{n_{\text{ar}}} - 1 \right) f = 5 \text{ cm}$$

Formulário

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r} - \vec{r}_q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^3} dq(\vec{r}_q)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r})$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E}$$

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = (Q_c)_{int}$$

$$\vec{J} = \sigma_e \vec{E}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \times 10^9 \left(\frac{Vm}{C}\right)$$

$$\vec{F}_m(\vec{r}_q) = q \vec{v}_q \times \vec{B}(\vec{r}_q)$$

$$d\vec{F}_m(\vec{l}) = Id\vec{l} \times \vec{B}(\vec{l})$$

$$\Phi_k = \iint_{S_k} \vec{B} \cdot d\vec{S} = L_k I_k + \sum_{j \neq k} M_{kj} I_j$$

$$\mathcal{E}_{em} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$U_m = \frac{1}{2} \sum_k I_k \Phi_k = \iiint \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} dV$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \left(\frac{H}{m}\right)$$

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_c \quad ; \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\rho_P = \frac{(E_0^P)_r}{(E_0^P)_i} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \quad ; \quad \tau_P = \frac{(E_0^P)_t}{(E_0^P)_i} = \frac{2 \sin \theta_i \cos \theta_i}{\cos(\theta_i - \theta_t) \sin(\theta_i + \theta_t)}$$

$$\rho_S = \frac{(E_0^S)_r}{(E_0^S)_i} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \quad ; \quad \tau_S = \frac{(E_0^S)_t}{(E_0^S)_i} = \frac{2 \sin \theta_i \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_q|} dq(\vec{r}_q)$$

$$\varphi(\vec{r}_B) = \varphi(\vec{r}_A) - \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} \quad ; \quad \sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}_{ext}$$

$$\rho_c = \nabla \cdot \vec{D} \quad ; \quad \sigma_c = (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{n}$$

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$q_e \approx -1.602 \times 10^{-19} (C)$$

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{l})}{|\vec{r} - \vec{l}|^3}$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{c_{im}}$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$$\vec{J}_{ms}(\vec{r}_s) = \vec{M}(\vec{r}_s) \times \vec{n}_{ext}(\vec{r}_s)$$

$$\vec{J}_m(\vec{r}) = \nabla \times \vec{M}(\vec{r})$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad ; \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\vec{A}_o e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}) = i\vec{k} \times \vec{A}_o e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_{lente}}{n_{meio}} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$