EXAME DE FÍSICA IV - ELECTROMAGNETISMO

18 de Junho de 2003
Cursos de Eng. Física Tecnológica, Matemática Aplicada e Computação,
Eng. Aeroespacial e Computação e Informática

ATENÇÃO - LEIA S.F.F. AS INSTRUÇÕES QUE SE SEGUEM:

(a) Duração: 3 horas.
(b) Cotação: 5 valores cada pergunta.
(c) Assinale na primeira folha os grupos a que respondeu.
(d) Resolva cada problema em folhas separadas.

(Problema-1) Quando se faz passar uma corrente eléctrica I na junção (pela base, de raio r) de dois condutores cilíndricos diferentes, de condutividades σ_1 e σ_2 e permitividades ε_1 e ε_2 respectivamente, aparece uma distribuição de cargas junto a essa junção. Determine a expressão da respectiva densidade de cargas ρ e a sua natureza, explicando o seu raciocínio. (Sugestão: use condições fronteira).

(Solução:) (a) Da Lei de Gauss $\nabla \cdot \mathbb{D} = \rho_c$ deduz-se, por integração numa caixa cilíndrica $\mathcal{B}$ (de base Δa e altura δh desprezável) com bases paralelas à face $\mathcal{S}$ da junção, de cada lado desta, que

$$\iiint_{\mathcal{B}} \nabla \cdot \mathbb{D}\, dV \equiv \iint_{\partial\mathcal{B}} \mathbb{D} \cdot d\mathbf{S} = (D_{2\perp} - D_{1\perp})\Delta a + o(\delta h) = \Delta Q_{\mathcal{B}}$$

onde $\Delta Q_{\mathcal{B}} = \iiint_{\mathcal{B}} \rho_c dV$ é a carga livre no interior de $\mathcal{B}$. Notando que, se houver uma distribuição superficial de cargas livres ρ_{cs} em $\mathcal{S}$, $\lim\limits_{\delta h \to 0} \Delta Q_{\mathcal{B}} = \rho_{cs}\, \Delta a \neq 0$, obtém-se no limite

$$D_{2\perp} - D_{1\perp} = \rho_{cs} \qquad \left(\tfrac{C}{m^2}\right)$$

(b) De acordo com a Lei de Ohm, a densidade de corrente $\mathbb{J}_i = \sigma_i \mathbb{E}_i$ em cada meio (linear) de condutibilidade σ_i onde exista um campo eléctrico $\mathbb{E}_i$. Como $\mathbb{D}_i = \varepsilon_i \mathbb{E}_i$

$$I = \iint_{\mathcal{S}} \mathbb{J}_i \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{S}} \tfrac{\sigma_i}{\varepsilon_i} D_{i\perp}\, dS \qquad \text{(i=1,2)}$$

donde se conclui que

$$\left(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}\right) I = \iint_{\mathcal{S}} \left(D_{2\perp} - D_{1\perp}\right) dS = \iint_{\mathcal{S}} \rho_{cs}\, dS = Q_{\mathcal{S}}$$

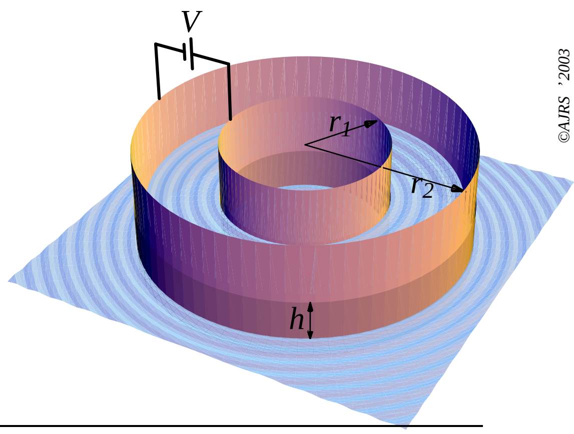
Se assumirmos distribuição homogénea de corrente, então a densidade superficial média de carga em $\mathcal{S}$ é

$$\rho \equiv \rho_{cs} = \frac{Q_{\mathcal{S}}}{S} = \frac{I}{\pi r^2}\left(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}\right) \qquad \left(\tfrac{C}{m^2}\right)$$

(c) Quando $I > 0$ no sentido $1 \to 2$, assumindo $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \approx 1$ nos condutores, a carga superficial ρ_{cs} acumulada em $\mathcal{S}$ é positiva quando a condutividade $\sigma_2 < \sigma_1$, i.e. quando o condutor 2 tem maior resistividade.

(Problema-2) Dois tubos cilíndricos coaxiais condutores, de raios r_1 e r_2 são baixados na vertical sobre um banho de óleo, de densidade ρ e constante dielétrica ε. Aplicando uma diferença de potencial V entre os tubos, mostre que o óleo sobe no espaço entre os tubos até uma altura dada por

$$h = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_o)V^2}{\rho\, g\, ({r_2}^2 - {r_1}^2) \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$



(Solução:) (a) A energia armazenada num condensador de capacidade $C = \frac{Q}{V}$, quando carregado com carga Q e diferença de potencial $V = \Delta\varphi$ entre as armaduras, é

$$U_c = \int_0^Q V(q) dq = \int_0^Q \frac{1}{C} q dq = \frac{1}{2} V^2 C$$

(b) Se mantivermos a diferença de potencial V constante[1] e fizermos variar a capacidade C em função dum parâmetro h, i.e. $C = C(h)$, então a variação de energia armazenada no condensador é

$$dU_c(h) = \frac{1}{2} V^2\, dC(h)$$

Contudo, uma tal variação implica um correspondente acréscimo de carga $dQ(h) = V\, dC(h)$ fornecido ao condensador, o que acarreta um fornecimento de energia, por parte da bateria ao condensador, de

$$dE_b(h) = V\, dQ(h) = V^2 dC(h)$$

A diferença $dW(h) = dE_b(h) - dU_c(h) = \frac{1}{2} V^2\, dC(h)$ é assim a energia que 'sobra' para realizar o trabalho necessário à alteração de geometria do condensador, i.e. à mudança da capacidade $C(h)$.

(c) Da expressão para o trabalho $dW(h) = \frac{dW}{dh} dh = F(h) dh$ se conclui que a força total que actua sobre o dielétrico (óleo) deve ser

$$F(h) = \frac{1}{2} V^2 \frac{dC(h)}{dh}$$

(d) A capacidade dum condensador cilíndrico, de raios r_1 e r_2 e altura $H \gg r_i$, com dielétrico de permitividade ε, é calculável sabendo que o campo entre as armaduras é radial, de magnitude $E(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon H r}$ (usando lei de Gauss), donde se conclui que $\varphi = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon H} \log(r) + \varphi_o$, pelo que

$$\varphi(r_1) - \varphi(r_2) = V = \frac{Q}{2\pi\varepsilon H} \log(\frac{r_2}{r_1}) \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon H}{\log(\frac{r_2}{r_1})}$$

(e) O condensador do problema pode ser encarado como dois condensadores em paralelo, um de altura h e constante dielétrica ε (óleo), e outro de altura $H - h$ e constante dielétrica ε_o (ar). Como a capacidade de condensadores em paralelo se adiciona, a capacidade total é

$$C(h) = \frac{2\pi\left(h\left(\varepsilon - \varepsilon_o\right) + H\varepsilon_o\right)}{\log(\frac{r_2}{r_1})} \quad \Longrightarrow \quad F(h) = \frac{1}{2} V^2 \frac{dC(h)}{dh} = \frac{\pi\left(\varepsilon - \varepsilon_o\right) V^2}{\log(\frac{r_2}{r_1})}$$

(f) Numa situação de equilíbrio, a força $F(h)$ deve anular o peso do óleo elevado $F(h) = \rho\pi\left(r_2^2 - r_1^2\right) hg$, donde se conclui

$$h = \frac{\left(\varepsilon - \varepsilon_o\right) V^2}{\rho g\left(r_2^2 - r_1^2\right)\log(\frac{r_2}{r_1})}$$

[1]**N.B.-** No caso do condensador estar isolado e desligado da bateria, é a carga Q nas armaduras que se mantém constante, mas o potencial $V(h) = \frac{Q}{C(h)}$ é variável. Neste caso, a energia armazenada no condensador de capacidade $C(h)$ é $U_c(h) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C(h)}$. Uma variação dh que corresponda a um aumento de capacidade $dC(h) > 0$ implica um decréscimo de energia armazenada

$$dU_c(h) = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C(h)^2}\, dC(h) < 0$$

Isto signifi ca que esta energia é usada na realização de trabalho para alterar a geometria do condensador, i.e. $dW(h) = -dU_c(h) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C(h)^2}\, dC(h)$. Assim, para haver equilíbrio

$$F(h) = \frac{dW(h)}{dh} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C(h)^2}\frac{dC(h)}{dh} = \frac{Q^2\log(\frac{r_2}{r_1})\left(\varepsilon - \varepsilon_o\right)}{4\pi\left(h\left(\varepsilon - \varepsilon_o\right) + H\varepsilon_o\right)^2} = \rho\pi\left({r_2}^2 - {r_1}^2\right) h g$$

pelo que, pondo $A = 1 + \frac{27 Q^2\left(\varepsilon_r - 1\right)^2\log(\frac{r_2}{r_1})}{8\pi^2\varepsilon_o\rho g\left({r_2}^2 - {r_1}^2\right) H^3}$ (um número puro, como se pode ver pelas unidades de $\frac{1}{4\pi\varepsilon_o} = \left[\frac{N m^2}{C^2}\right]$), se obtém

$$h = \left(\left(A + \sqrt{A^2 - 1}\right)^{\frac{1}{6}} - \left(A + \sqrt{A^2 - 1}\right)^{-\frac{1}{6}}\right)^2 \frac{H\varepsilon_o}{3\left(\varepsilon - \varepsilon_o\right)}$$

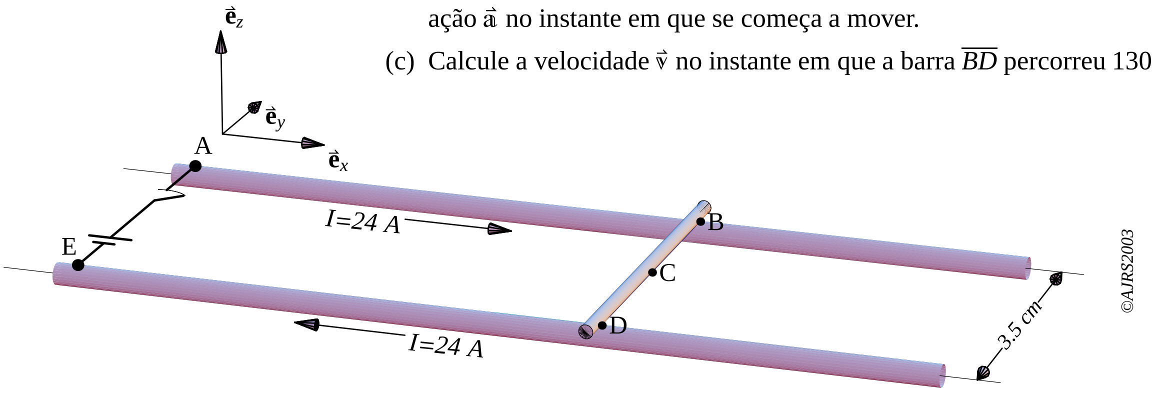
(Problema-3) Considere o seguinte modelo. Duas barras condutoras muito longas e paralelas estão num plano horizontal, separadas por $3.5\,cm$, e ligadas por uma outra barra $\overline{BD}$ de massa $m = 3\,g$. A barra está inicialmente em repouso mas pode deslocar-se sem atrito sobre as duas primeiras.Mantendo o contacto entre as três barras, podemos em qualquer posição estabelecer uma corrente I no circuito $ABCDEA$. Uma fonte mantém a corrente no valor contante $I = 24\,A$

(a) Calcule a indução magnética $\vec{\mathbb{B}}_C$ no ponto C, a meia distância entre B e D.

Embora o campo aumente quando nos deslocamos na direcção das extremidades B ou D, considere o valor médio de $\vec{\mathbb{B}}$, ao longo da barra $\overline{BD}$, o valor $\langle\vec{\mathbb{B}}\rangle = 5 \times \vec{\mathbb{B}}_C$.

(b) Calcule assim a força total $\vec{\mathbb{F}}$ que se exerce sobre esta barra e a sua aceleração $\vec{\mathbb{a}}$ no instante em que se começa a mover.

(c) Calcule a velocidade $\vec{\mathbb{v}}$ no instante em que a barra $\overline{BD}$ percorreu $130\,cm$.



(Solução:) (a) Para calcular o campo magnético criado pela corrente $I = 24\,A$ percorrendo o circuito $\Gamma = \overline{ABCDEA}$ deve-se usar a lei de Biot-Savart[2]

$$\mathbb{B}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_\Gamma \frac{I\,d\vec{\mathbf{l}} \times (\vec{\mathbf{r}} - \mathbf{l})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{l}}|^3}$$

Usando um sistema coordenado com origem em C, podemos parametrizar simplesmente o caminho Γ, usando d para designar o comprimento do troço $\overline{BD}$ e L o comprimento de $\overline{AB}$ ou $\overline{DE}$:

$$\begin{array}{llll}
\vec{\mathbf{l}}(s) = s\,\vec{\mathbf{e}}_x + \frac{d}{2}\,\vec{\mathbf{e}}_y & \text{com} & (-L < s \leqslant 0) & \text{em } \overline{AB} \\
\vec{\mathbf{l}}(s) = s\,\vec{\mathbf{e}}_y & \text{com} & (-\frac{d}{2} \leqslant s \leqslant \frac{d}{2}) & \text{em } \overline{BD} \\
\vec{\mathbf{l}}(s) = s\,\vec{\mathbf{e}}_x - \frac{d}{2}\,\vec{\mathbf{e}}_y & \text{com} & (-L < s \leqslant 0) & \text{em } \overline{DE} \\
\vec{\mathbf{l}}(s) = -L\,\vec{\mathbf{e}}_x + s\,\vec{\mathbf{e}}_y & \text{com} & (-\frac{d}{2} \leqslant s \leqslant \frac{d}{2}) & \text{em } \overline{EA}
\end{array}$$

Notando que em C se tem $\vec{\mathbf{r}} = 0$, a expressão de $\mathbb{B}_C$ simplifica-se para

$$\mathbb{B}_C = \mathbb{B}(0) = \frac{\mu_o I}{4\pi}\int_\Gamma \frac{\vec{\mathbf{l}} \times d\vec{\mathbf{l}}}{l^3}$$

No caso do troço $\overline{AB}$, podemos ver que $\frac{d\vec{\mathbf{l}}}{ds} = \vec{\mathbf{e}}_x$ e portanto $\vec{\mathbf{l}} \times \frac{d\vec{\mathbf{l}}}{ds} = -\frac{d}{2}\,\vec{\mathbf{e}}_z$. Assim a contribuição deste troço para o campo $\mathbb{B}(0)$ é

$$\Delta\mathbb{B}_{AB}(0) = \frac{\mu_o I}{4\pi}\int_{\overline{AB}} \frac{\vec{\mathbf{l}} \times d\vec{\mathbf{l}}}{l^3} = \frac{\mu_o I}{4\pi}\int_{-L}^{0} \frac{-\frac{d}{2}\,\vec{\mathbf{e}}_z}{\left(\frac{d^2}{4} + s^2\right)^{\frac{3}{2}}}ds = -\frac{\mu_o I}{2\pi d\sqrt{1 + \frac{d^2}{4L^2}}}\;\vec{\mathbf{e}}_z$$

[2] **N.B.-** A utilização da Lei de Ampére para cada um dos troços, e subsequente sobreposição dos campos em C, não é aqui válida porque só há uma forma de ter um condutor com corrente I a terminar num ponto a distância finita: é quando esse ponto representa a armadura de um condensador acumulando carga à taxa $\frac{dQ}{dt} = I$. Mas então temos que entrar em conta com o campo eléctrico variável causado por essa acumulação de carga, i.e. na Lei de Ampére teríamos de conhecer o termo de corrente de deslocamento $\vec{\mathbf{J}}_d = \frac{\partial\mathbb{D}}{\partial t}$ e contabilizar a sua contribuição para o campo em C.

O troço $\overline{BD}$ não contribui para o campo em C, e para $\overline{DE}$ tem-se $\vec{\mathbf{l}} \times \frac{d\vec{\mathbf{l}}}{ds} = \frac{d}{2}\vec{\mathbf{e}}_z$, contudo o integral é feito no sentido inverso do de $\overline{AB}$, donde

$$\Delta\mathbb{B}_{DE}(0) = \frac{\mu_o I}{4\pi}\int_{\overline{DE}} \frac{\vec{\mathbf{l}} \times d\vec{\mathbf{l}}}{l^3} = \frac{\mu_o I}{4\pi}\int_0^{-L} \frac{\frac{d}{2}\vec{\mathbf{e}}_z}{\left(\frac{d^2}{4} + s^2\right)^{\frac{3}{2}}} ds = -\frac{\mu_o I}{2\pi d\sqrt{1 + \frac{d^2}{4L^2}}}\ \vec{\mathbf{e}}_z$$

Finalmente para $\overline{EA}$, tem-se $\frac{d\vec{\mathbf{l}}}{ds} = \vec{\mathbf{e}}_y$ e também $\vec{\mathbf{l}} \times \frac{d\vec{\mathbf{l}}}{ds} = -L\vec{\mathbf{e}}_z$, contribuindo assim com

$$\Delta\mathbb{B}_{EA}(0) = \frac{\mu_o I}{4\pi}\int_{\overline{EA}} \frac{\vec{\mathbf{l}} \times d\vec{\mathbf{l}}}{l^3} = \frac{\mu_o I}{4\pi}\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{-L\,\vec{\mathbf{e}}_z}{\left(L^2 + s^2\right)^{\frac{3}{2}}} ds = -\frac{\mu_o I d}{4\pi L^2\sqrt{1 + \frac{d^2}{4L^2}}}\, e_z$$

Adicionando todos os termos obtemos

$$\mathbb{B}_C = -\frac{\mu_o I\sqrt{1 + \frac{d^2}{4L^2}}}{\pi d}\ \vec{\mathbf{e}}_z$$

No limite $\frac{d}{L} \ll 1$ podemos ver que

$$\mathbb{B}_C = -\frac{\mu_o I}{\pi d}\ \vec{\mathbf{e}}_z = -274.3 \times 10^{-6}\,\mathbf{e}_z\ (T)$$

(b) Utilizando a aproximação do campo médio constante $\langle\mathbb{B}\rangle = 5 \times \mathbb{B}_C$ ao longo da barra $\overline{BD}$, e sabendo que aqui $\frac{d\vec{\mathbf{l}}}{ds} = \vec{\mathbf{e}}_y$, podemos calcular a força de Lorentz exercida na corrente I a partir da expressão

$$\vec{\mathbf{F}} = I\int_{BD} d\vec{\mathbf{l}} \times \langle\mathbb{B}\rangle = I\int_{\frac{d}{2}}^{-\frac{d}{2}} \vec{\mathbf{e}}_y \times \left(-\frac{5\mu_o I}{\pi d}\ \vec{\mathbf{e}}_z\right) ds = \frac{5\mu_o I^2}{\pi}\ \vec{\mathbf{e}}_x = 1.152 \times 10^{-3}\,\vec{\mathbf{e}}_x\ (N)$$

A aceleração da barra é constante durante o movimento: $\vec{\mathbf{a}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{m} = 0.384\,\vec{\mathbf{e}}_x\ (\frac{m}{s^2})$.

(c) Para um movimento com aceleração constante $\vec{\mathbf{a}}$ pode-se usar, em consequência da conservação de Energia Mecânica total, o resultado

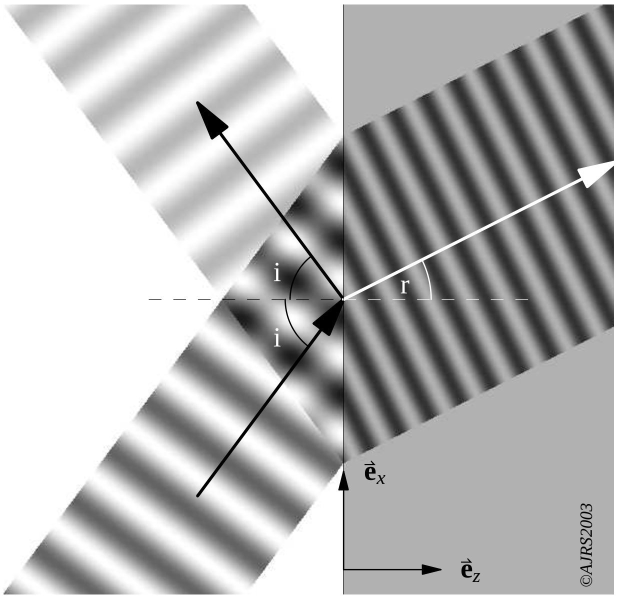
$$\frac{1}{2}|\vec{\mathbf{v}}_1|^2 - \frac{1}{2}|\vec{\mathbf{v}}_o|^2 = \vec{\mathbf{a}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}$$

Se $\vec{\mathbf{v}}_o = 0$ e $\Delta\vec{\mathbf{x}} = 1.3\,\vec{\mathbf{e}}_x\ (m)$, então $\vec{\mathbf{v}}_1 = \sqrt{2\,\vec{\mathbf{a}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{x}}}\ \vec{\mathbf{e}}_x = 0.9992\,\vec{\mathbf{e}}_x\ (\frac{m}{s})$.

(Problema-4) Uma onda e.m. plana, monocromática, propagando-se no vazio ($\epsilon_r = \mu_r = 1$), apresenta uma polarização circular direita (helicidade negativa). Incide segundo um ângulo de $i = 45^\circ$ sobre a superfície de um dielétrico com $\epsilon_r = 2.56$, $\mu_r = 1$. O campo eléctrico da onda apresenta uma amplitude de $E_o = 5 \times 10^{-3} \left(\frac{V}{m}\right)$ e a sua frequência angular é dada por $f = 2\pi \times 10^5 \left(\frac{rad}{s}\right)$

(a) Calcule o seu comprimento de onda λ_i, e o comprimento de onda λ_t da onda transmitida.

(b) Calcule o valor médio do vector de Poynting da onda transmitida.



(Sugestão:) Use as equações de Fresnel para

a onda reflectida: $\dfrac{E''_{o\perp}}{E_{o\perp}} = -\dfrac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}$; $\dfrac{E''_{o\parallel}}{E_{o\parallel}} = \dfrac{\tan(i-r)}{\tan(i+r)}$

a onda transmitida: $\dfrac{E'_{o\perp}}{E_{o\perp}} = \dfrac{2\,\cos(i)\sin(r)}{\sin(i+r)}$; $\dfrac{E'_{o\parallel}}{E_{o\parallel}} = \dfrac{2\,\cos(i)\sin(r)}{\sin(i+r)\cos(i-r)}$

onde $E_{o\perp}$ e $E_{o\parallel}$ são as amplitudes das componentes perpendicular e paralela ao plano de incidência da onda incidente.

(Solução:) (a) Usando a relação de dispersão $\omega = k\,c$, onde c é a velocidade de propagação da onda no meio e $\omega \equiv f = 2\pi \times 10^5 \left(\frac{rad}{s}\right)$, obtém-se

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = 3 \times 10^3\ (m)$$

no vazio. Dentro do dielétrico a velocidade de propagação da onda é $c' = \dfrac{c}{n'}$, onde n' designa o índice de refracção do dielétrico, $n' = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \approx \sqrt{\varepsilon_r} = 1.6$, pelo que

$$\lambda' = \frac{2\pi}{k'} = \frac{2\pi c'}{\omega} = \frac{\lambda}{n'} = 1.875 \times 10^3\ (m)$$

(b) Usando a Lei de Snell podemos determinar primeiro o ângulo de refracção r:

$$\sin(r) = \frac{n}{n'}\ \sin(i) \qquad \Longrightarrow \qquad r = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2\times 1.6}\right) = 26.23^{\circ}$$

Usando este valor, e tendo em conta que para polarização circular se tem $E_{o\perp} = E_{o\parallel} = E_o$, podemos calcular

$$\mathrm{E}'_{o\perp} = \frac{2\ \cos(i)\sin(r)}{\sin(i+r)} E_o = 3.3\times\ 10^{-3}\ (\frac{V}{m})$$

$$\mathrm{E}'_{o\parallel} = \frac{2\ \cos(i)\sin(r)}{\sin(i+r)\cos(i-r)} E_o = 3.486\times\ 10^{-3}\ (\frac{V}{m})$$

(c) O vector de Poynting $\mathbb{S} = \mathbb{E}\times\mathbb{H}$ representa uma densidade de fluxo de energia electromagnética (i.e. energia que atravessa uma área unitária por unidade de tempo). De facto, a densidade de energia do campo electromagnético é sempre

$$w_{em} = \frac{1}{2}\mathbb{E}\cdot\mathbb{D} + \frac{1}{2}\mathbb{B}\cdot\mathbb{H} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu}B^2\right)$$

No caso de uma onda plana, $\mathbb{E} = \vec{\mathbf{E}}_o e^{i(\vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}}-\omega t)}$, $\mathbb{B} = \frac{1}{\omega}\vec{\mathbf{k}}\times\mathbb{E} = \frac{1}{c}\vec{\mathbf{n}}\times\mathbb{E}$, donde

$$w_{op} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu c^2}E^2\right) = \varepsilon E^2 \quad \left(\frac{J}{m^3}\right) \qquad\qquad (c^{-2} = \mu\,\varepsilon)$$

Como $\mathbb{H} = \frac{1}{\mu}\mathbb{B}$ (e aqui $\mathbb{B} = \frac{1}{c}\vec{\mathbf{n}}\times\mathbb{E}$) obtemos, relembrando[3] que $\vec{\mathbf{n}}\cdot\mathbb{E} = 0$,

$$\mathbb{S} = \mathbb{E}\times\mathbb{H} = \frac{1}{\mu c}\mathbb{E}\times(\vec{\mathbf{n}}\times\mathbb{E}) = \varepsilon E^2\,\vec{\mathbf{c}} \quad \left(\frac{J}{m^2 s}\right) \qquad\qquad (\vec{\mathbf{c}} = c\,\vec{\mathbf{n}})$$

O módulo deste vector é $|\mathbb{S}| = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^2 = \frac{1}{Z'}E^2$, onde $Z' = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ (Ω) designa a impedância do espaço onde a onda se propaga. O valor médio do vector de Poynting da onda transmitida é assim, usando $Z' = Z\,\frac{n}{n'} = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}}\,\frac{1}{1.6} = 235.456$ (Ω) e notando que $\left\langle \sin(\omega t)^2\right\rangle = \frac{1}{2}$

$$\left\langle S'\right\rangle = \frac{1}{Z'}\left\langle E'^2\right\rangle = \frac{1}{2\,Z'}\left(E'^2_{o\perp} + E'^2_{o\parallel}\right) = 48.9\times\ 10^{-9}\ (\frac{W}{m^2})$$

[3]**N.B.** Use $\mathbb{a}\times(\mathbb{b}\times\mathbb{c}) = (\mathbb{a}\cdot\mathbb{c})\,\mathbb{b} - (\mathbb{a}\cdot\mathbb{b})\,\mathbb{c}$