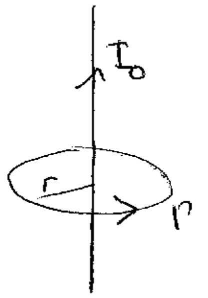
1º Exame EeO, LEFT/AERO 22/6/06

I

Ver solução do 1º miniteste D.

II

a) Para um fio infinito sabemos que as linhas de campo são circunferências e que sobre a circunferência $|B|$ é constante. Podemos portanto aplicar a lei de Ampère



$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_0$$

$$|\vec{B}|2\pi r = \mu_0 I_0 \Rightarrow |\vec{B}| = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\frac{1}{r}$$

Para a geometria do problema temos para $y>0$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\frac{1}{y}\,\vec{e}_z}$$ No plano xoy ; $y>0$

b) Tomemos $\vec{n} \parallel \vec{B} \parallel \vec{e}_z$. Então

$$\Phi(t) = \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{L+vt}^{2L+vt} dy\, \frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\frac{1}{y}$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} L \int_{L+vt}^{2L+vt} dy\, \frac{1}{y}$$

logo

$$\boxed{\Phi(t) = \frac{\mu_0 I_0 L}{2\pi}\ln\left(\frac{2L+vt}{L+vt}\right)}$$

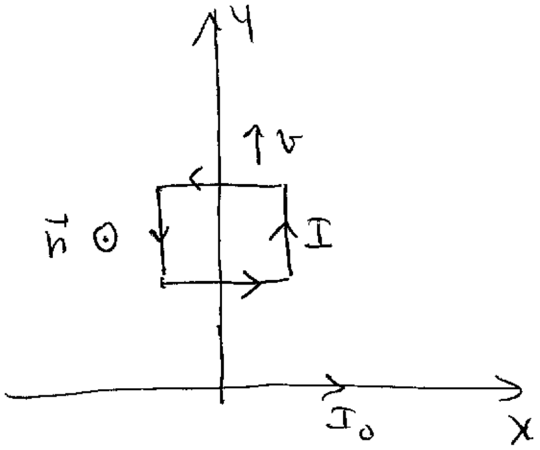
c) $$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I_0 L}{2\pi} v \frac{\dfrac{L+vt-(2L+vt)}{(L+vt)^2}}{\dfrac{2L+vt}{L+vt}}$$

$$= \frac{\mu_0 I_0 L^2}{2\pi} v \frac{1}{(2L+vt)(L+vt)}$$

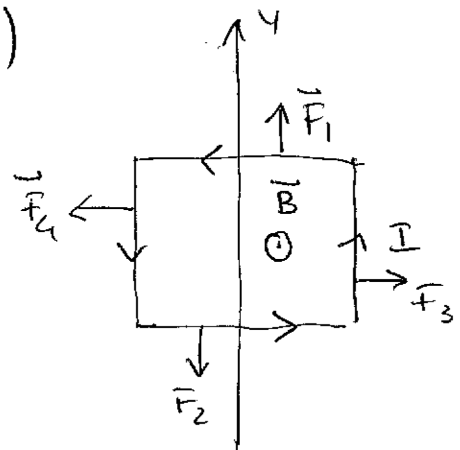
e pertanto

$$\boxed{I_{ind} = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mu_0 I_0 L^2}{2\pi R} v \frac{1}{(2L+vt)(L+vt)}}$$

Come $I > 0$, la corrente fluisce nel senso arbitrario nella scelta di $\vec{n}$



d)



$$d\vec{F} = I\, d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$|\vec{F}_3| = |\vec{F}_4| = \int_{L+vt}^{2L+vt} dy\, I \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{1}{y}$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} I I_0 \ln\left(\frac{2L+vt}{L+vt}\right)$$

$$|\vec{F}_1| = \int_{-L/2}^{L/2} dx\, I \frac{\mu_0}{2\pi} I_0 \frac{1}{2L+vt} = \frac{\mu_0}{2\pi} I I_0 \frac{L}{2L+vt}$$

$$|\vec{F}_2| = \int_{-L/2}^{L/2} dx \; I \frac{\mu_0}{2\pi} I_0 \frac{1}{L+vt} = \frac{\mu_0}{2\pi} I I_0 \frac{L}{L+vt}$$

Como $|\vec{F}_3| = |\vec{F}_4|$ e $|\vec{F}_2| > |\vec{F}_1|$ a resultante será

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \frac{\mu_0}{2\pi} I I_0 \left(\frac{L}{2L+vt} - \frac{L}{L+vt} \right) \vec{e}_y$$

$$\boxed{\vec{R} = -\frac{\mu_0}{2\pi} I I_0 \frac{L^2}{(2L+vt)(L+vt)} \vec{e}_y}$$

Se I_0 invertesse o sentido a força mantinha o sentido para travar o movimento da espira.

e) Para manter a espira em movimento é necessário aplicar uma força

$$\vec{F} = -\vec{R} = \frac{\mu_0}{2\pi} I I_0 \frac{L^2}{(2L+vt)(L+vt)} \vec{e}_y$$

Então

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{\mu_0}{2\pi} I I_0 v \frac{L^2}{(2L+vt)(L+vt)}$$

$$= R I \left(\underbrace{\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_0 L^2 v}{R} \frac{1}{(2L+vt)(L+vt)}}_{I} \right)$$

$$= R I^2$$

a) $k_x = 0$; $k_y = |\vec{k}|\alpha$; $k_z = \beta|\vec{k}|$

$$|\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = |\vec{k}|\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \Rightarrow \boxed{\alpha^2+\beta^2=1}$$

e a direcção de propagação é

$$\boxed{\vec{n} = \alpha\vec{e}_y + \beta\vec{e}_z}$$

Para ser uma onda electromagnética devemos ter

$$\boxed{\vec{n}\cdot\vec{E} = 0}$$

Logo

$$0 = \alpha E_y + \beta E_z = (\alpha+\beta)E_0 \sin[\,..\,]$$

e portanto

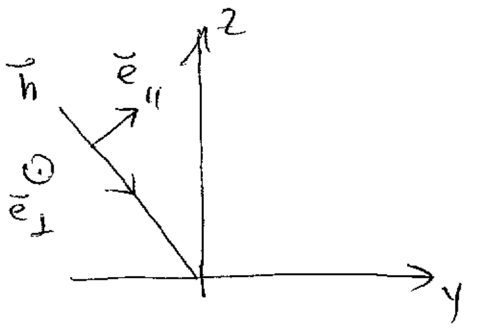
$$\boxed{\alpha+\beta = 0}$$

Como $\alpha > 0$ a solução é

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \;;\; \beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

b) $$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_y - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_z$$

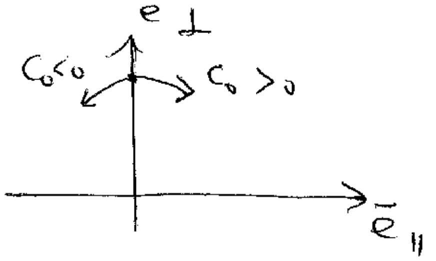
c) Para $c_0 = 0$ temos polarização linear. Os campos estão em fase e $E_z = E_y$. Para $c_0 \neq$ devemos ter em geral polarização elíptica excepto para $c_0 = \pm\sqrt{2}$ onde temos polarização circular. Para este último caso temos



$\vec e_\perp = \vec e_x \quad ; \quad \vec e_\parallel = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\vec e_y + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\vec e_z$

$$\vec E = E_\parallel \vec e_\parallel + E_\perp \vec e_\perp$$

Con
$$\begin{cases} E_\perp = C_0 E_0 \cos[\cdots] \\ E_\parallel = \sqrt{2}\, E_0 \sin[\cdots] \end{cases}$$

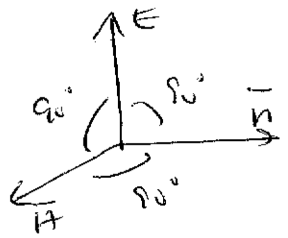


$C_0 = \sqrt{2} \Rightarrow$ circular derecha

$C_0 = -\sqrt{2} \Rightarrow$ circular izquierda

$C_0 \neq 0, \pm\sqrt{2} \Rightarrow$ elíptica.

d)



$$\vec H = \frac{1}{Z}\,\vec n \times \vec E = \frac{1}{Z}\begin{vmatrix} \vec e_x & \vec e_y & \vec e_z \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{Z}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,(E_y + E_z)\,\vec e_x$$

$$= \frac{n}{Z_0}\,\sqrt{2}\,E_0 \sin[\cdots]\,\vec e_x$$

$\vec H = H_0 \sin[\cdots]\,\vec e_x$ con $H_0 = 7.5 \times 10^{-6}$ A/m

e) $\vec S = \vec E \times \vec H = Z\,|\vec H|^2\,\vec n$

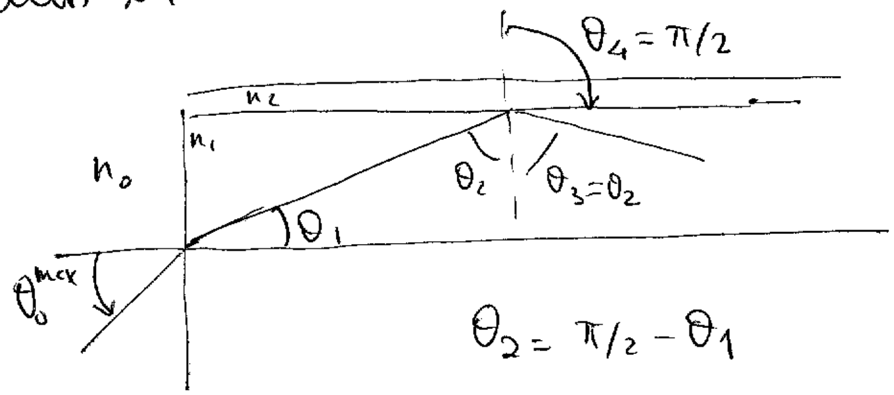
$$\langle |\vec S| \rangle = Z\,\langle |\vec H|^2 \rangle = \frac{Z_0}{2}\,\frac{1}{2}\,H_0^2 = 5.3 \times 10^{-9}\ \mathrm{W/m^2}$$

Igualmente:

$$\langle |\vec S| \rangle = \frac{1}{Z}\,\langle |\vec E|^2 \rangle = \frac{2}{Z_0}\Big(\underbrace{\langle E_x^2 \rangle}_{\frac{1}{2}E_0^2} + \underbrace{\langle E_y^2 \rangle}_{\frac{1}{2}E_0^2}\Big) = \frac{2}{Z_0}\,E_0^2 =$$

IV

a) Para haver transmissão na fibra óptica, tem que haver <u>reflexão total</u> na superfície n_1, n_2. Assim devemos ter



$$\theta_2 = \pi/2 - \theta_1$$

e portanto

$$n_0 \sin\theta_0^{max} = n_1 \sin\theta_1 = n_1 \cos\theta_2$$

$$n_1 \sin\theta_2 = n_2 \sin\frac{\pi}{2} = n_2$$

logo $\sin\theta_2 = \dfrac{n_2}{n_1}$ (<1 pois $n_2 < n_1$)

e finalmente

$$\sin\theta_0^{max} = \frac{n_1}{n_0}\cos\theta_2 = \frac{n_1}{n_0}\sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$$

ou ainda

$$\theta_0^{max} = \arcsin\left[\frac{1}{n_0}\sqrt{n_1^2 - n_2^2}\right]$$

b) Se $n_0 = 1$, $n_1 = 1.5$, $n_2 = 1.4$ obtemos

$$\boxed{\theta_0^{max} = 32.6^\circ}$$ <u>vazio</u>

Se $n_0 = 1.33$

$$\boxed{\theta_0^{max}(\text{água}) = 23.88^\circ}$$ <u>Água</u>

Se a luz incide com $\theta_0 = 32.6°$ temos

$$\theta_0 > \theta_0^{max}(\text{água})$$

e portanto a fibra já não conduz toda a luz incidente.

c) Da alínea a) vimos que

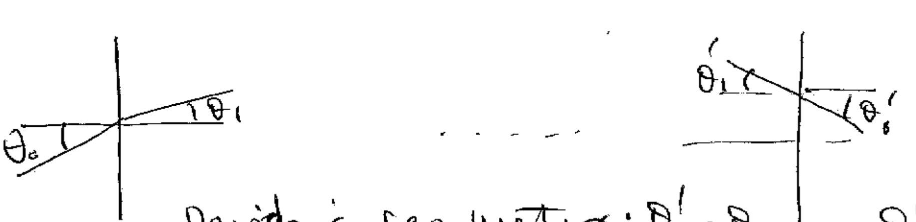
$$\sin\theta_0^{max} = \frac{1}{n_0}\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

logo

$$\boxed{AN = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$$

d) Como $\theta_0 < \theta_0^{max}$ (vazio) toda a luz que entra dentro da fibra é transmitida. Contudo vai haver reflexão à entrada e à saída. Assim

$$\text{Energia transmitida} = T_\perp(\text{entrada}) \times T_\perp(\text{saída})$$



Devido à geometria: $\theta_1' = \theta_1$ e $\theta_0' = \theta_0$

Como os factores de Reflexão e transmissão são simétricos na troca $i \Leftrightarrow r$ devemos ter

$$T_\perp(\text{entrada}) = T_\perp(\text{saída}) = 1 - R_\perp(\text{entrada})$$

$$= 1 - \frac{\sin^2(\theta_0 - \theta_1)}{\sin^2(\theta_0 + \theta_1)}$$

Como

$$n_0 \sin\theta_0 = n_1 \sin\theta_1 \Rightarrow \theta_1 = \text{Arcsin}\left(\frac{0.5}{1.5}\right)$$

ou $\theta_1 = 19.5^\circ$

e portanto

$$T_L(\text{entrada}) = 1 - \frac{\sin^2(30^\circ - 19.5^\circ)}{\sin^2(30 + 19.5^\circ)}$$

$$= 1 - 0.06 = 0.94$$

e finalmente

$$\%\ \text{Energ transmitida} = (0.94)^2 = 0.89 \Rightarrow 89\%$$

V

Ver livro pg 83 e 84.