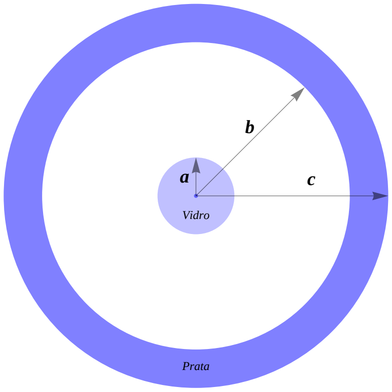
Grupo I



Considere duas esferas concêntricas: uma de vidro maciça (isolante), de raio $a = 5\,cm$, e outra de prata ôca (condutor), com raios interno e externo $b = 20\,cm$ e $c = 25\,cm$ respectivamente.

Sendo o campo eléctrico $\vec{E}$, a $10\,cm$ do centro, radial e dirigido para o centro com magnitude $3.6\times 10^2\,\frac{V}{m}$, e a 50 cm do centro, radial e dirigido para o exterior, com magnitude $2\times 10^2\,\frac{V}{m}$, determine:

a) A carga Q_v da esfera de vidro e como se pode encontrar distribuída.

b) A carga Q_p da esfera ôca de prata e como se pode encontrar distribuída.

c) A carga total em cada uma das superfícies interna e externa da esfera de prata.

d) O potencial V_p a que se encontra a esfera de prata.

- Alínea a)

Usando a Lei de Gauss para uma superfície esférica $\mathcal{S}_i$ de raio $r_i = 0.1\,m$ centrada na origem podemos calcular o fluxo de $\vec{E}$ através de $\mathcal{S}_i$, tendo em conta que aí a orientação de $\vec{E}$ é oposta à direcção da normal exterior $\vec{n} = \vec{e}_r$ à superfície $\mathcal{S}_i$. Assim, temos que sobre $\mathcal{S}_i$

$$\vec{E}\cdot d\vec{S} == \left(-E_r[r_i]\,\vec{e}_r\right)\cdot\left(\vec{e}_r\,dS\right) == -E_r[r_i]\,dS == -3.6\times 10^2\,dS$$

Sabendo que a área de uma superfície esférica de raio r é $S = 4\pi r^2$ obtemos, uma vez que $E_r[r_i]$ é constante sobre $\mathcal{S}_i$ e que a carga interior a $\mathcal{S}_i$ está toda na esfera de vidro, (a constante eléctrica $\frac{1}{4\pi\epsilon_o} \simeq 9\times 10^9$ ($*$ $\frac{\text{V m}}{\text{A s}}$ $*$))

$$\int\!\!\int_{\mathcal{S}_i} \vec{E}\cdot d\mathcal{S} == \frac{Q_v}{\epsilon_o} \quad\Longrightarrow\quad -E_r[r_i]\,4\pi\, r_i^2\,\epsilon_o == Q_v \qquad \therefore \qquad Q_v == -\frac{3.6\times 10^2\times 0.1^2}{9\times 10^9} == -\,4\times 10^{-10}\,(*\,\text{C}\,*)$$

Esta carga pode estar distribuída por toda a esfera de vidro, e a única condição exigida é que a sua distribuição tenha simetria esférica, i.e. a densidade de carga $\rho = \rho[r]$ apenas pode variar com a distância à origem. O caso mais simples é o da distribuição uniforme em volume, e nesse caso

$$\rho_v == \frac{Q_v}{\frac{4}{3}\pi a^3} \qquad \therefore \qquad \rho_v == \frac{-4\times 10^{-10}}{\frac{4}{3}\pi\times 0.05^3} == -7.64\times 10^{-7}(*\,\frac{\text{C}}{\text{m}^3}\,*)$$

Lei de Gauss	0.2
Superfície de Gauss r=0.1m	0.2
Fluxo Total	0.2
Sinal da Carga	0.2
Distribuição de Carga	0.2

- Alínea b)

A aplicação da Lei de Gauss ao fluxo do campo eléctrico $\vec{E}$ através duma superfície esférica $\mathcal{S}_e$ de raio $r_e = 0.5\,m$, com o mesmo centro que as anteriores, é de forma idêntica ao calculado anteriormente

$$\int\int_{S_e} \vec{E}\cdot d\mathcal{S} == \frac{Q_p + Q_v}{\epsilon_o} \quad \Longrightarrow \quad E_r[r_e]\, 4\,\pi\; r_e^2\, \epsilon_o == Q_p + Q_v \qquad \therefore$$

$$Q_p == E_r[r_e]\, 4\,\pi\; r_e^2\, \epsilon_o - Q_v == \frac{2\times 10^2 \times 0.5^2}{9\times 10^9} + 4\times 10^{-10} == 5.96\times 10^{-9}\,(*\ \mathrm{C}\ *)$$

Nos condutores em equilíbrio electroestático a carga distribui - se pelas superfícies condutoras. Assim a carga $Q_p = Q[b] + Q[c]$, onde $Q[b]$ é a carga superficial na parte interior da esfera de prata, e $Q[c]$ é a carga superficial na parte exterior da esfera de prata.

Superfície de Gauss r=0.5m	0.2
Fluxo Total	0.2
Carga Interna Q_p+Q_v	0.2
Carga Esfera Prata Q_p	0.2
Distribuição de Carga	0.2

- Alínea c)

A carga $Q[b]$ na superfície interior da esfera de prata é igual e de sinal contrário à calculada para a esfera de vidro porque o campo dentro do condutor é nulo, pelo que o fluxo através de qualquer superfície $\mathcal{S}_r$ inteiramente contida entre o raio interno b e externo c da esfera de prata $(b < r < c)$ deve ser zero, ou seja a carga $Q_v + Q[b]$ que fica no seu interior deve também ser zero.

$$\underset{b<r<c}{\int\int_{\mathcal{S}_r}} \vec{E}\cdot d\mathcal{S} == 0 == \frac{Q[b] + Q_v}{\epsilon} \qquad \therefore \qquad Q[b] + Q_v == 0 \quad \Longrightarrow \quad Q[b] == -Q_v == 4\times 10^{-10}\,(*\ \mathrm{C}\ *)$$

Quanto à carga superficial exterior

$$Q[c] == Q_p - Q[b] == 5.56\times 10^{-9}\,(*\ \mathrm{C}\ *)$$

As densidades superficiais de carga não são necessáriamente iguais.

$$\sigma_s[b] == \frac{Q[b]}{4\,\pi\, b^2} \qquad \therefore \qquad \sigma_s[b] == \frac{4\times 10^{-10}}{4\,\pi\times 0.2^2} == 7.96\times 10^{-10}\,(*\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}\ *)$$

$$\sigma_s[c] == \frac{Q[c]}{4\,\pi\, c^2} \qquad \therefore \qquad \sigma_s[c] == \frac{5.56\times 10^{-9}}{4\,\pi\times 0.25^2} == 7.08\times 10^{-9}\,(*\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}\ *)$$

Justificação Q[b]+Q_v=0	0.4
Carga Superficial Interior	0.2
Carga Superficial Exterior	0.4

- Alínea d)

O campo total fora da esfera de prata é equivalente ao campo da carga superficial $Q[c]$ apenas, e sendo a sua distribuição uniforme, é indistinguível do campo de uma carga pontual na origem pelo que potencial fora da esfera de prata comporta-se também como o potencial de uma carga pontual $Q[c]$ na origem. Assumindo $V_\infty == 0$,

$$V_p == \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Q[c]}{c} == 9\times 10^9 \times \frac{5.56\times 10^{-9}}{0.25} == 200.16\,(* \text{ V } *)$$

Justificação campo carga pontual	0.2
Identificação carga pontual Q[c]	0.3
Expressão Potencial V_p	1.0

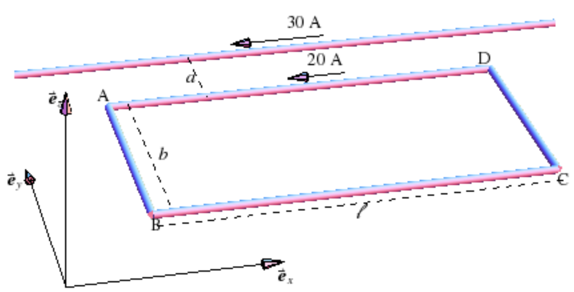
Grupo II

A figura mostra uma espira rectangular e um fio infinito situados no mesmo plano Π . As correntes que percorrem o fio e a espira são respectivamente iguais a 30 A e 20 A. Considerando $a = 1.\,cm$, $b = 8.\,cm$ e $\ell = 30\,cm$,

a) Calcule o campo magnético $\vec{B}_f$gerado pelo fio infinito no plano Π e à distância d do fio.

b) Calcule a força exercida em cada um dos lados da espira rectangular por este campo $\vec{B}_f$.

c) Calcule a força total exercida sobre a espira e sobre o fio infinito.



- Alinea a)

Usando a lei de Ampère para uma circunferência de raio $r = d$ centrada no fio infinito num plano perpendicular a este obtém-se pela simetria de rotação em torno do fio

$$\oint_d \vec{B}_f \cdot d\vec{r} == \mu_o \mathcal{I}_f \qquad \Longrightarrow \qquad B_f[d]\, 2\pi d == \mu_o \mathcal{I}_f \qquad \therefore \qquad B_f[d] == \frac{\mu_o \mathcal{I}_f}{2\pi d} \;\Longrightarrow \vec{B}_f[d] == \frac{\mu_o \mathcal{I}_f}{2\pi d}\vec{e}_z$$

Este campo quando restrito ao plano Π é perpendicular a este e aponta na direcção $\vec{e}_z$.

- Alínea b)

A força sobre o lado da espira à distância a do fio é

$$\vec{F}_a == \mathcal{I}_e \int_\ell d\vec{\ell} \times \vec{B}_f[a] \qquad \therefore \qquad \vec{F}_a == \mathcal{I}_e \ell \;\; B_f[a]\,\vec{e}_y == 20\times 0.3\times \frac{\mu_o\, 30}{2\pi\;.01}\vec{e}_y == \; 3.6\times 10^{-3}\,\vec{e}_y \;\; (* \text{ N } *)$$

A força sobre o lado da espira à distância $a + b$ do fio é

$$\vec{F}_b == -\mathcal{I}_e \int_\ell d\vec{\ell} \times \vec{B}_f[b] \qquad \therefore \qquad \vec{F}_b == -\mathcal{I}_e \ell \;\; B_f[b]\,\vec{e}_y == -20\times 0.3\times \frac{\mu_o\, 30}{2\pi\;.08}\vec{e}_y == -4.5\times 10^{-4}\,\vec{e}_y \;\; (* \text{ N } *)$$

A força sobre o lado esquerdo da espira no sentido $a \to b$ é

$$\vec{F}_{ab} == -\mathcal{I}_e \int_a^{a+b} B_f[s]\, ds\, \vec{e}_x == -\frac{\mu_o\, \mathcal{I}_e\, \mathcal{I}_f}{2\pi} Log\left[\frac{a+b}{a}\right] \vec{e}_x \quad \therefore \quad \vec{F}_{ab} == -\frac{\mu_o\, 20 \times 30}{2\pi} Log[9]\, \vec{e}_x == \; -2.6 \times 10^{-4}\, \vec{e}_x \quad (* \text{ N } *)$$

A força sobre o lado direito da espira no sentido $b \to a$ é

$$\vec{F}_{ba} == -\vec{F}_{ab}$$

- Alinea c)

A força total sobre a espira é a soma das forças aplicadas a cada um dos seus lados

$$\vec{F}_e == \vec{F}_a + \vec{F}_b == \left(3.6 \times 10^{-3} \quad - 4.5 \times 10^{-4}\right) \vec{e}_y == \; 3.15 \times 10^{-3}\, \vec{e}_y \quad (* \text{ N } *)$$

Quanto à força exercida pelo campo da espira sobre o fio infinito, na ausência de outras forças externas esta só pode ser igual e no sentido oposto à que actua na espira de acordo com a lei de acção e reacção de Newton.

$$\vec{F}_f == -\vec{F}_e$$

Grupo III

Uma barra pesada com 1 m de comprido é mantida horizontalmente numa direcção Este-Oeste num local onde o campo magnético terrestre tem uma componente horizontal de 2.0×10^{-5} T apontando para o Norte. A barra é largada. Qual a força electromotriz induzida na barra 4 segundos depois de ter sido largada?

A altura da barra vai diminuir com o tempo de acordo com a lei de queda dos graves

$$y[t] == y_o - \frac{1}{2} g\, t^2$$

A área rectangular subtendida pela barra até ao chão pode ser orientada na direcção Norte e então

$$A[t] = y[t]\, \ell \qquad \therefore \qquad \vec{S}[t] == A[t]\, \vec{e}_N$$

O fluxo do campo magnético terrestre através desta área é

$$\Phi[t] == \vec{B}_T \cdot \vec{S}[t] == B_T\, y[t]\, \ell$$

A força electromotriz induzida na barra é proporcional à variação de fluxo

$$\varepsilon_m == -\frac{d\Phi[t]}{dt} == -B_T\, \ell\, \frac{dy[t]}{dt} == B_T\, \ell\, g\, t \qquad \therefore \qquad \varepsilon_m == \; 2 \times 10^{-5} \times 1 \times 9.8 \times 4 == 7.84 \times 10^{-4}\, (* \text{ V } *)$$

Grupo IV

É conhecido o campo eléctrico de uma onda plana propagando-se num meio dieléctrico ($\mu_r = 1$):

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = -0.4\times 10^{-9}\, Cos\left[5\times 10^5\, t - 2\times 10^{-3}\left(\frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right] \\ E_z = +0.4\times 10^{-9}\, Cos\left[5\times 10^5\, t - 2\times 10^{-3}\left(\frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right] \end{cases}$$

a) Qual a direcção e sentido da onda?
b) Calcule a velocidade de propagação da onda e o índice de refracção do meio.
c) Qual é o comprimento de onda?
d) Qual é a sua polarização?
e) Determine a expressão do campo magnético B associado.

- Alinea a)

A expressão geral do campo eléctrico numa onda plana é a parte real da expressão complexa

$$\vec{E}[\vec{r}, t] == \vec{E}_o\, e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)} == \vec{E}_o\left(Cos\left[\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right] + i\, Sin\left[\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right]\right)$$

Neste caso, assumindo que $\vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$, vemos a partir de $\vec{k}\cdot\vec{r}$ que se deve ter

$$\vec{k} == \sqrt{2}\times 10^{-3}\left(\vec{e}_y + \vec{e}_z\right)$$

Assim conclui-se que a onda se propaga na direcção de $\left(\vec{e}_y + \vec{e}_z\right)$ equanto o campo eléctrico oscila na direcção $\left(\vec{e}_y - \vec{e}_z\right)$. Estas duas direcções são perperdiculares como se esperaria.

- Alinea b)

A velocidade de propagação (neste caso idêntica à velocidade de fase, $\phi = \vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t = c^{te}$, donde $\frac{d\phi}{dt} = 0 = \vec{k}\cdot\vec{v}_f - \omega \quad \therefore \quad k\, v_f = \omega$) pode-se calcular a partir da relação de dispersão $k\, v = \omega$, onde $k = |\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$.

$$v == \frac{\omega}{k} == \frac{5\times 10^5}{2\times 10^{-3}} == 2.5\times 10^8 (* \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \ *)$$

O índice de refracção n é então

$$n == \frac{c}{v} == \frac{3}{2.5} == 1.2$$

- Alinea c)

O comprimento de onda obtém a partir do número de ondas $k = |\vec{k}|$

$$\lambda == \frac{2\pi}{k} == 1000\,\pi$$

Alinea d)

O campo eléctrico tem uma amplitude dada pelo vector real

$$\vec{E}_o == 0.4\times 10^{-9}\left(-\vec{e}_y + \vec{e}_z\right)$$

A onda é assim polarizada linearmente na direcção $-\vec{e}_y + \vec{e}_z$.

- Alinea e)

$$\vec{k}\times\vec{E} = \omega\,\vec{B} \quad \therefore \quad \vec{B} == \frac{1}{5\times 10^5}\sqrt{2}\times 10^{-3}\left(\vec{e}_y + \vec{e}_z\right)\times 0.4\times 10^{-9}\left(-\vec{e}_y + \vec{e}_z\right) Cos\left[\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega\,t\right] == 2.26\times 10^{-18}\, Cos\left[\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega\,t\right]\vec{e}_x$$

Grupo V

Um raio de luz propaga-se a partir de um projector no interior da água de um aquário até atingir a fronteira entre a água e o ar. Calcule, justificando, o ângulo de incidência mínimo para o qual o raio é totalmente reflectido de volta para o interior do aquário (índice de refracção da água $n_{ag} = 1.33$).

Utilizando a lei de Snell conclui-se que

$$n_{ag}\, Sin[\theta_i] == n_{ar}\, Sin[\theta_t]$$

Quando se dá a Reflexão total o ângulo de transmissão é o máximo possível, i.e. $\theta_t = \frac{\pi}{2}$ pelo que $Sin[\theta_t] = 1$ donde

$$Sin\left[\theta_{i_c}\right] == \frac{n_{ar}}{n_{ag}} == \frac{1}{1.33} \quad \therefore \quad \theta_{i_c} == ArcSin\left[\frac{1}{1.33}\right] == 48.75\,°$$