



## Resolução do 1º Teste

Na realização do teste/exame não são permitidas máquinas de calcular e telemóveis.

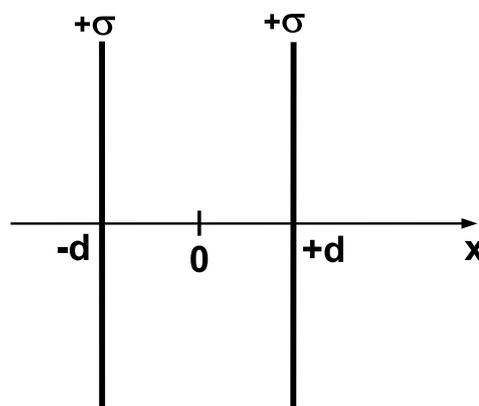
Identifique claramente todas as folhas do exame.

Realize sempre em primeiro lugar os cálculos analíticos e só no final substitua pelos valores numéricos.

Duração do teste: 1h30

1. Considere o sistema representado na figura, constituído por duas placas de espessura desprezável e tamanho *infinito*, colocadas nas posições  $+d$  e  $-d$  do eixo  $XX$ . Ambas as placas estão uniformemente carregadas com uma densidade de carga positiva  $+\sigma$ .

- a) [1] Determine a expressão do campo eléctrico,  $\vec{E}_{(+d)}$ , criado em todo o espaço pela placa colocada na posição  $x = +d$ .
- b) [1] Determine a expressão do campo eléctrico criado pelo conjunto das duas placas em todo o espaço,  $\vec{E}$ .



- c) [1] Tomando como ponto de referência a origem do referencial ( $x = 0$ ), determine a expressão do potencial eléctrico criado pelas duas placas nas diferentes regiões do espaço.

*Resolução*

- a) O campo eléctrico criado por um plano infinito carregado com uma densidade de carga  $+\sigma$  pode ser calculado utilizando a lei de Gauss, tal como se encontra explicado no exemplo 1.2.3 da colecção de problemas da cadeira. Estando o plano situado no plano  $YZ$ , com coordenada  $x = +d$ , o campo eléctrico :

$$\vec{E} = +\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x, \quad x > d$$

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x, \quad x < d$$

- b) O campo total criado pelos dois planos pode ser obtido a partir do princípio da sobreposição uma vez que já se conhece o campo criado por um só plano:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x, \quad x > d$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x = 0, \quad -d < x < d$$

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x, \quad x < -d$$

- c) A função potencial num ponto definida como o integral de linha do campo eléctrico desde esse ponto até um ponto de referência onde se considera que o potencial é nulo. No nosso caso o ponto de referência foi estabelecido na origem do referencial ( $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ):

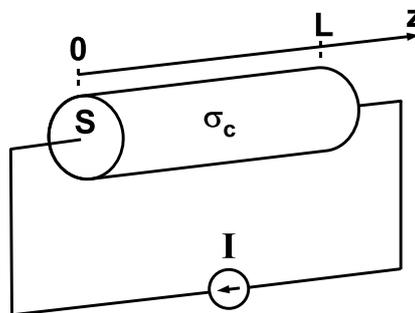
$$\phi = \int_x^{ref} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_x^0 E dx$$

$$\phi = \int_x^0 0 dx = 0, \quad -d < x < d$$

$$\phi = \int_x^0 E dx = \int_x^d E dx + \int_d^0 0 dx = \frac{\sigma}{\epsilon_0}(d-x), \quad x > d$$

$$\phi = \int_x^0 E dx = \int_x^{-d} E dx + \int_{-d}^0 0 dx = \frac{\sigma}{\epsilon_0}(d+x), \quad x < -d$$

2. O cilindro representado na figura tem uma secção constante  $S = 2 \text{ mm}^2$ , um comprimento  $L = 10 \text{ cm}$  e está ligado a uma fonte de corrente  $I = 2 \text{ mA}$ . A sua condutividade eléctrica não é constante, variando ao longo do seu comprimento de acordo com a expressão  $\sigma_c = 0,5/z [\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}]$ .



- a) [1] Determine as expressões da densidade de corrente ( $\vec{J}$ ) e do campo eléctrico ( $\vec{E}$ ) dentro do cilindro.
- b) [1] Determine a resistência eléctrica do cilindro.
- c) [1] Determine a potência dissipada por efeito de Joule no cilindro. Qual é a extremidade do cilindro que se encontra a maior temperatura?

*Resolução*

- a) A corrente eléctrica estacionária e uniformemente distribuída em cada secção do condutor (a condutividade constante para cada secção). Desta forma:

$$\vec{J} = \frac{I}{S} \vec{u}_z = 10^3 \vec{u}_z \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$$

O campo eléctrico pode ser encontrado a partir da densidade de corrente utilizando a lei de Ohm:

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma_c} = 2 \times 10^3 z \vec{u}_z \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

- b)

$$R = \frac{V}{I}$$

$$V = \int_0^L E dz = 2 \times 10^3 \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^L = 10 \text{ V}$$

$$R = 5 \text{ k}\Omega$$

- c) A potência total dissipada por efeito de Joule no condutor

$$P = V I = 20 \text{ mW}$$

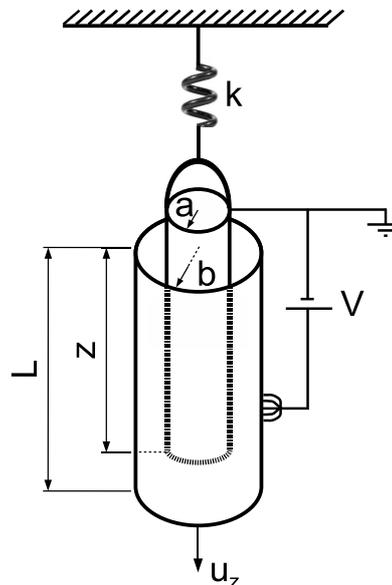
A densidade de potência dissipada por efeito de Joule

$$p = J E = 2 \times 10^6 \cdot z \text{ W.m}^{-3}$$

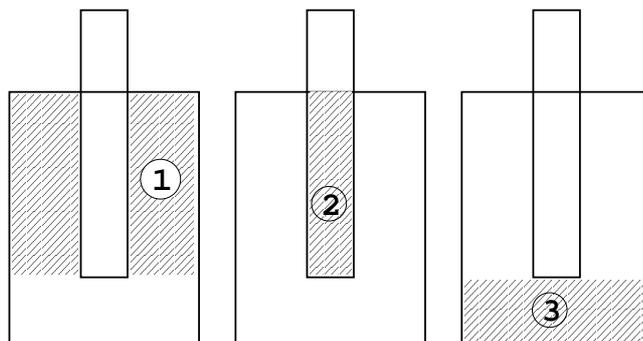
ou seja, em  $z = L$  há mais potência a ser dissipada por unidade de volume no condutor (maior resistividade) pelo que o condutor atinge a uma maior temperatura.

**3.** Um electrómetro é um instrumento para medição de diferenças de potencial. O electrómetro cilíndrico é composto por duas armaduras cilíndricas (ocas) coaxiais de altura  $L$  e raios  $a$  e  $b$ . A armadura interior, de raio  $a$  e massa desprezável, encontra-se ligada a uma mola de constante elástica  $\kappa$  e pode-se deslocar axialmente ao longo do eixo  $ZZ$ . Quando o electrómetro se encontra descarregado a armadura de raio  $a$  encontra-se completamente fora da armadura externa ( $z = 0$ ).

O electrómetro, quando ligado a uma diferença de potencial  $V$ , apresenta a geometria da figura. Desprezando os efeitos de bordo nas armaduras (isto é, considerando os campos como se fossem criados por armaduras cilíndricas *infinitas*), determine:



- a) [1 ] o campo eléctrico,  $\vec{E}$ , existente nas diferentes regiões interiores à armadura de raio  $b$ ;  
*Nota: na análise do campo eléctrico podem-se considerar as regiões indicadas na figura abaixo*



- b) [1 ] a densidade linear de carga,  $\lambda$ , em cada uma das armaduras;  
c) [0,5 ] a capacidade do dispositivo,  $C$ , em função de  $z$ ;  
d) [0,5 ] a força eléctrica segundo  $\vec{u}_z$  que é exercida sobre a armadura interior;  
e) [1 ] Discuta, justificando, qual o valor máximo de diferença de potencial mensurável por este dispositivo.

*Resolução*

- a) O campo eléctrico na região **1**, num ponto qualquer a uma distância  $a < r < b$  é dado pela lei de Gauss:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Nas regiões **2** e **3**, o campo eléctrico é nulo, uma vez que não existiriam cargas eléctricas interiores a uma superfície cilíndrica fechada  $S$ , que passasse por um qualquer ponto existente nessas regiões.

b)

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \vec{u}_r$$

O conhecimento da diferença de potencial permite-nos obter a densidade linear de carga ( $\lambda$ ) e portanto  $\vec{E}$ :

$$V = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\vec{E} = \frac{V}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{1}{r} \vec{u}_r$$

c)

$$C = \frac{\lambda z}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0 z V}{V \ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{2\pi\epsilon_0 z}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

d) A energia do sistema só depende da coordenada  $z$ :

$$U = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} z V^2$$

A força ao longo de  $z$  deriva-se então como:

$$\vec{F} = + \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} V^2$$

e) A força eléctrica sobre a armadura interna, proporcional a  $V^2$  puxa-a para dentro do cilindro exterior sendo equilibrada em cada instante pela força da mola  $\vec{F} = k\vec{z}$ . Desta forma, a medida do alongamento da mola dá-nos a tensão aplicada. O alongamento máximo da mola corresponde à posição em que o cilindro interior se encontra todo dentro da armadura exterior ( $z = L$ ).



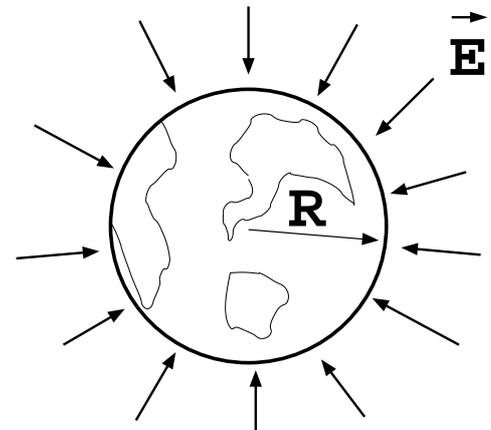
**Resolução do 1º Exame/2º Teste**

- Na realização do teste/exame não são permitidas máquinas de calcular e telemóveis.
- Identifique claramente todas as folhas do exame.
- **Realize sempre em primeiro lugar os cálculos analíticos e só no final substitua pelos valores numéricos.**
- O teste consiste nos problemas: 2, 3 e 4.

Duração do Teste: 1h45

Duração do Exame: 2h30

1. A radioactividade existente na Terra assim como os raios cósmicos que nela incidem produzem a ionização da sua atmosfera, o que faz com que esta possua uma condutividade eléctrica que aumenta com a altura. De forma simplificada, pode-se admitir então a Terra como um corpo esférico condutor de raio  $R \simeq 6 \times 10^6$  m, rodeada por um meio condutor de condutividade eléctrica variável com a altura. Sabendo que a Terra possui um campo eléctrico à sua superfície, radial,  $\vec{E} = -100 \vec{u}_r$  V/m:



- [1,0] Determine a carga eléctrica total,  $Q$ , existente na Terra.
- [1,0] Determine a energia electrostática armazenada pela Terra.
- [1,0] Sabendo que a condutividade eléctrica do ar junto à superfície terrestre é de  $\sigma_c = (6/\pi) 10^{-14}$  S/m, determine a corrente eléctrica total que flui na direcção da Terra.
- [1,0] Caso não existissem fontes de carga eléctrica, o mecanismo de descarga pela atmosfera levaria a Terra a ficar neutra. Verifique que a lei de variação de carga na Terra é dada por:

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\sigma_c}{\epsilon_0} t}$$

e estime o tempo de neutralização  $\tau$ .

- [1,0] Medições do campo eléctrico a uma altura  $h = 100$  m, mostram que este diminui de 10% em relação ao existente à superfície da Terra. Determine a densidade média de carga existente na região próxima da superfície terrestre.

*Sugestão: Note que pode considerar o raio da Terra  $R \gg h$ . O volume de uma camada de ar de espessura  $x$  a uma distância  $r$  do centro da Terra é dado por:  $V \simeq 4\pi r^2 x$ .*

---

## Correcção

- a) Tendo em conta a lei de Gauss e usando como superfície gaussiana a superfície terrestre, tem-se:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow Q = -\epsilon_0 4\pi R^2 E = -4 \cdot 10^5 [C]$$

- b) A energia electrostática armazenada corresponde ao trabalho gasto para dotar a Terra de uma carga  $Q$  e é dado por  $U = \frac{1}{2} Q \Phi$ , onde  $\Phi$  é o potencial a que as cargas se encontram.

$$U = \frac{1}{2} Q \phi = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} = 1,2 \cdot 10^{14} [J]$$

*Nota:* Na resolução deste problema, a densidade de energia associada ao campo eléctrico  $u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$  poderia ser integrada em todo o volume onde existe campo eléctrico,

$$U = \int_R^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi = \int_R^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \right)^2 r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$$

- c) Calculando a densidade de corrente eléctrica,  $\vec{J} = \sigma_c \vec{E} = -\frac{6}{\pi} 10^{-12} \vec{u}_r [A/m^2]$ , pode-se obter a corrente eléctrica como sendo:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS = 864 [A]$$

- d) A corrente eléctrica de descarga da Terra pode ser escrita como:

$$I = \sigma_c 4\pi R^2 E_{(r=R)} = \sigma_c 4\pi R^2 \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \right) = \frac{\sigma_c}{\epsilon_0} Q$$

Donde, a corrente de descarga da Terra através da atmosfera  $I$  relaciona-se com a carga  $Q$  armazenada nesta através de:

$$I = -\frac{dQ}{dt} \Rightarrow -\frac{dQ}{dt} = \frac{\sigma_c}{\epsilon_0} Q \Rightarrow Q = Q_0 e^{-\frac{\sigma_c}{\epsilon_0} t}$$

O tempo de neutralização ( $\tau$ ) da Terra corresponde ao tempo de redução da carga armazenada na Terra para  $Q/e$ . Donde obtém-se  $\tau = \frac{\epsilon_0}{\sigma_c} \sim 500 [s]$

- e) A carga na camada esférica de raios entre  $[R, R+h]$  é dada a partir da lei de Gauss por:

$$Q = \epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \epsilon_0 [E_{r=R} 4\pi R^2 - E_{r=R+h} 4\pi (R+h)^2] \simeq 4\pi R^2 \epsilon_0 [E_{(r=R)} - E_{(r=R+h)}]$$

Donde, a densidade de carga existente na camada esférica é dada por:

$$\rho = \frac{Q}{Volume} = \frac{Q}{4\pi R^2 h} = \epsilon_0 \frac{E_{(r=R)} - E_{(r=R+h)}}{h} = \frac{10^{-12}}{36\pi} [C/m^3]$$

**2.** Uma película cilíndrica condutora de raio  $a$ , espessura desprezável e comprimento infinito, é percorrida por uma corrente eléctrica estacionária  $I$ , tal como se mostra na figura (a).

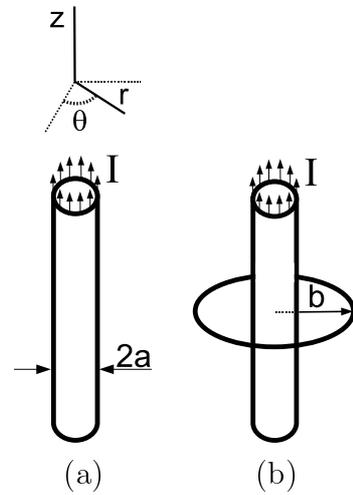
- a) [1,5 ] Determine a expressão do campo magnético  $\vec{B}$  dentro e fora da película ( $r < a$  e  $r > a$ ).

Um electrão é lançado com uma velocidade  $\vec{v}_0$  paralela à dos electrões de condução da película e a uma distância ao eixo do cilindro  $r_0 > a$ .

- b) [1,5 ] Determine a expressão do módulo da força a que fica sujeito o electrão em função da posição  $r$ , e faça um esboço da sua trajectória.  
 c) [1,0 ] Determine a expressão da energia cinética do electrão em função da posição  $r$ .

Em torno da película cilíndrica é colocada uma espira circular de raio  $b$ , tal como se mostra na figura (b).

- d) [1,0 ] Determine o coeficiente de indução mútua do sistema cilindro-espira.



### Correcção

- a) Aplicando a lei de Ampère e utilizando caminhos circulares  $\Gamma$  concêntricos com a película cilíndrica, tem-se:

$$r < a : \quad \vec{B} = \mathbf{0}$$

$$r > a : \quad B2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

- b) A força aplicada sobre o electrão em módulo vem:

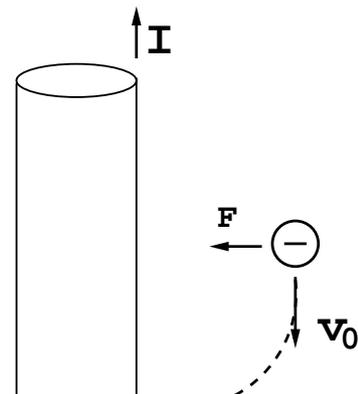
$$|\vec{F}| = qv_0 \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

- c) O trabalho realizado pela força magnética sobre o electrão é nulo, uma vez que  $\vec{F} \perp \vec{v}$ ;

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = 0$$

Desta forma, não há variação de energia cinética. A trajectória do electrão vai ser circular, mas atenção, com raio variável uma vez que a força (sempre perpendicular à velocidade!) à medida que o electrão se aproxima da película, aumenta, diminuindo portanto o raio de curvatura do electrão.

$$T = \frac{1}{2} m v_0^2$$

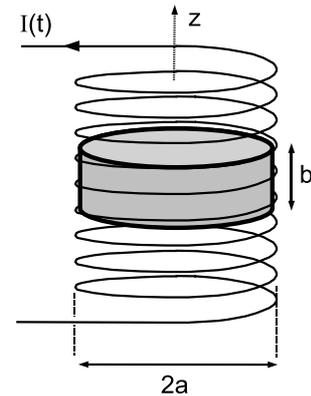


d) O coeficiente de indução mútua é dado por:

$$M = \frac{\Phi_{esp}}{I} = 0$$

uma que que o fluxo do campo magnético ( $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$ ) que atravessa a espira é nulo.

**3.** As placas de indução electromagnética são utilizadas como alternativa aos fogões a gás convencionais. Naquelas, o aquecimento do recipiente faz-se através da indução de correntes eléctricas (correntes de Foucault). O princípio físico da placa de indução pode ser estudado com recurso a um solenóide muito comprido de raio  $a$ , densidade de espiras  $n$  e a ser percorrido por uma corrente eléctrica alternada de baixa frequência,  $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ . No interior do solenóide existe um cilindro metálico feito de material não magnético<sup>(\*)</sup> ( $\mu_0$ ), condutividade eléctrica  $\sigma_c$ , raio  $a$  e altura  $b$ . Desprezando o campo magnético produzido pelo próprio cilindro, determine:



- [1,0 ] o campo magnético  $\vec{B}$  no interior do solenóide.
- [1,0 ] o fluxo do campo magnético que atravessa um círculo de raio  $r$  do material condutor.
- [1,0 ] a força electromotriz (f.e.m.) induzida na circunferência de raio  $r$ .
- [1,0 ] a densidade de corrente eléctrica induzida em função de  $r$ .
- [1,0 ] a potência dissipada no cilindro.

(\*)Nota: o material das panelas utilizadas nas placas de indução é de facto magnetizável!!!

### Correcção

- Uma bobine infinita é um dos quatro casos em que se pode alicar a lei de Ampère.

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int}$$

Por ser um caso clássico de aplicação da lei, tratado na bibliografia da cadeira, vamo-nos escusar de a detalhar nesta resolução (notar que o aluno ao resolver o exame deve detalhar a resolução!). O resultado da aplicação da lei é:

$$\vec{B} = \mu_0 n I_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

- O fluxo do campo magnético que atravessa a superfície  $S$  delimitada pelo caminho circular  $\Gamma$  de raio  $r$  é calculado da seguinte forma:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \int_S B \vec{u}_z \cdot \vec{u}_z dS = \int_S B dS = \mu_0 n \pi r^2 I_0 \cos(\omega t)$$

Note-se que o campo magnético varia no tempo mas é uniforme e daí ser constante na integração no círculo.

- c) A força electromotriz induzida numa circunferência de raio  $r$  é dada pela lei de Faraday-Lenz em que o fluxo através da superfície delimitada pela circunferência já foi calculado na alínea anterior:

$$\epsilon = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi}{dt} = +\mu_0 n \pi r^2 \omega I_0 \text{sen}(\omega t)$$

É importante neste ponto referir que este resultado significa que dentro da bobine existe um campo eléctrico com linhas de campo circulares e coaxiais com o eixo da bobine.

- d) Uma vez que a alínea anterior nos deu informação sobre o campo eléctrico que existe no interior da bobine, conhecendo a condutividade do condutor podemos utilizar a lei de Ohm local para encontrar a densidade de corrente existente no condutor. Um primeiro passo necessário consiste em relacionar o campo eléctrico com a força electromotriz induzida:

$$\epsilon = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{\Gamma} E \vec{u}_{\theta} \cdot r d\theta \vec{u}_{\theta} = E 2\pi r$$

$$\vec{E} = \frac{\epsilon}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{2} n r \omega I_0 \text{sen}(\omega t) \vec{u}_{\theta}$$

E em seguida podemos aplicar a lei de Ohm:

$$\vec{J} = \sigma_c \vec{E} = \sigma_c \frac{\mu_0}{2} n r \omega I_0 \text{sen}(\omega t) \vec{u}_{\theta}$$

- e) Como quer  $\vec{E}$  quer  $\vec{J}$  não são constantes no condutor cilíndrico (variam com  $r$ ), teremos de calcular primeiro a densidade de potência dissipada por efeito de Joule (valor local) e depois integrar para todo o volume do cilindro, obtendo a potência total dissipada no cilindro (a potência fornecida ao nosso modelo de panela!):

$$p = J E = \sigma_c E^2 = \sigma_c \left[ \frac{\mu_0}{2} n r \omega I_0 \text{sen}(\omega t) \right]^2$$

$$P = \int p dV = \int_0^b \int_0^{2\pi} \int_0^a p r dr d\theta dz = \sigma_c \left[ \frac{\mu_0}{2} n \omega I_0 \text{sen}(\omega t) \right]^2 b 2\pi \frac{a^4}{4}$$

4. Os raios X, descobertos em 1895 por Roentgen e usados habitualmente para a realização de radiografias, fazem parte do espectro de radiação electromagnética, ainda que possuam uma frequência muito superior à da luz visível. O campo magnético associado a um feixe de raios X que se propaga no ar, é descrito pela seguinte equação:

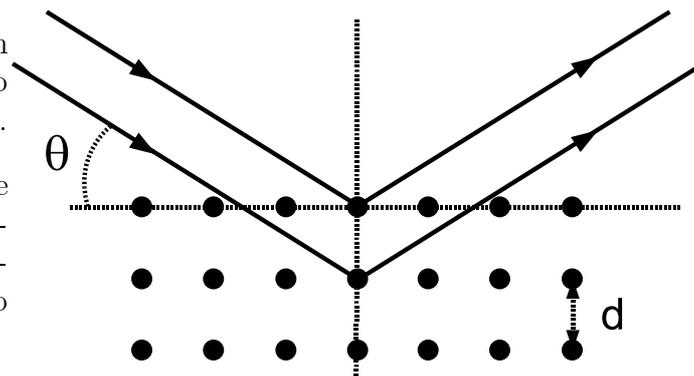
$$\vec{B} = 2 \times 10^{-3} \sqrt{\mu_0} \cos \left[ 2\pi \times 10^{19} t - \frac{2}{3} \pi \times 10^{11} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} y - \frac{1}{2} z \right) \right] \vec{u}_x \quad [T]$$

Determine:

- [1,0 ] a direcção de propagação da onda?
- [0,5 ] o comprimento de onda e a frequência dos raios X.
- [1,0 ] o campo eléctrico da onda.
- [1,0 ] a intensidade de radiação associada à onda electromagnética.

Os raios X incidem com um ângulo  $\theta$  sobre um cristal cujos planos atómicos adjacentes estão distanciados de  $d = 3 \times 10^{-10}$  m (ver figura).

- [1,5 ] Determine a expressão dos ângulos de incidência  $\theta$  para os quais os dois raios difractados mostrados na figura vão interferir construtivamente num ponto afastado do cristal (lei de Bragg).



### Correcção

- O argumento da função coseno contém o produto interno  $\vec{k} \cdot \vec{r}$  que já está escrito na forma  $k\vec{n} \cdot \vec{r}$ . Assim, o vector unitário com a direcção de propagação será:

$$\vec{n} = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{u}_y - \frac{1}{2} \vec{u}_z$$

- 

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 10^{19} \text{ Hz}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 3 \times 10^{-11} \text{ m}$$

c)

$$\vec{n} = \frac{\vec{E}}{E} \times \frac{\vec{B}}{B} \Leftrightarrow \vec{E} = c\vec{B} \times \vec{n}$$

$$\vec{E} = c \frac{1}{2} B_x \vec{u}_y + c \frac{\sqrt{3}}{2} B_x \vec{u}_z$$

$$E_y = 6 \times 10^5 \sqrt{\mu_0} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

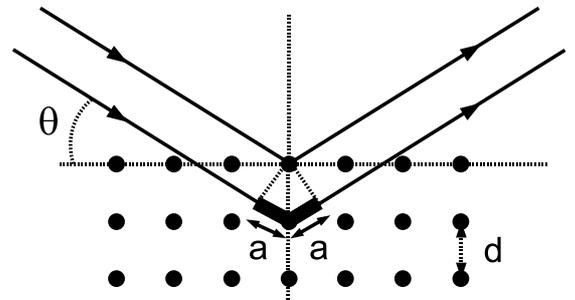
$$E_z = 6\sqrt{3} \times 10^5 \sqrt{\mu_0} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

d)

$$I = \langle S \rangle = \frac{c}{\mu_0} \langle B^2 \rangle = 4 \times 10^{-6} \times 3 \times 10^8 \langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \rangle = 600 \text{ W.m}^{-2}$$

e) Para haver interferência construtiva os dois raios indicados na figura têm de ter uma diferença de percurso que corresponda a um número inteiro de comprimentos de onda. Tal como se mostra na figura que se segue, a diferença de percurso entre os raios é  $2a = 2d \sin(\theta)$ . Assim a expressão para os máximos de interferência em função do ângulo  $\theta$ , neste caso conhecida como lei de Bragg, é:

$$2d \sin(\theta_{max}) = m\lambda$$





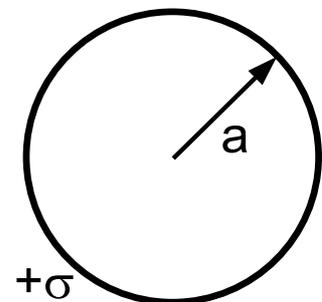
## Resolução do 2º Exame

- Na realização do teste/exame não são permitidas máquinas de calcular e telemóveis.
- Identifique claramente todas as folhas do exame.
- Resolva os grupos em páginas separadas
- Realize sempre em primeiro lugar os cálculos analíticos e só no final substitua pelos valores numéricos.

**Duração do Exame: 2h30**

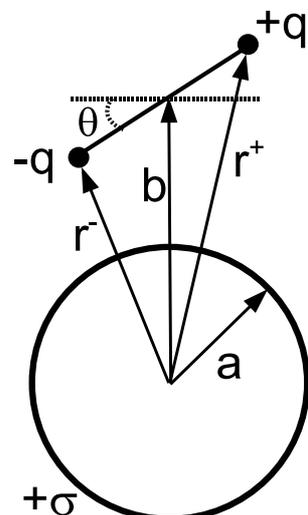
1. Considere a película esférica condutora de raio  $a$  e espessura desprezável, indicada na figura, que se encontra carregada com uma densidade de carga  $+\sigma$ .

- a) [1] Determine a expressão do campo eléctrico  $\vec{E}$  dentro e fora da superfície esférica ( $r < a$  e  $r > a$ ).
- b) [1] Determine a expressão do potencial eléctrico  $\phi$  dentro e fora da superfície esférica ( $r < a$  e  $r > a$ ). Considere como ponto de referência o infinito.
- c) [1] Determine a capacidade da película. Estime a sua ordem de grandeza caso a película tivesse um raio semelhante ao raio da Terra ( $R_{Terra} \approx 6000 \text{ km}$ ).



Considere que existe na vizinhança da película um dipolo de cargas  $+q$  e  $-q$  separadas de  $d$ . O dipolo pode rodar em torno do seu centro que está a uma distância  $b$  do centro da película (ver figura). Sabendo que  $b \gg d$  e que são válidas as aproximações  $r^+ \approx b + (d/2) \text{sen}(\theta)$  e  $r^- \approx b - (d/2) \text{sen}(\theta)$ , determine:

- d) [1] a expressão da energia potencial electrostática do dipolo devida ao campo eléctrico criado pela película. Esboce o gráfico da energia em função de  $\theta$  para  $\theta \in [-90^\circ; +90^\circ]$
- e) [1] determine os pontos de equilíbrio do dipolo e diga justificando qual o ponto de equilíbrio estável.



————— Correção —————

- a) A carga distribui-se à superfície da esfera. Tendo em conta a lei de Gauss e usando como superfície gaussiana uma superfície esférica, tem-se um campo  $\vec{E} = \mathbf{0}$  no interior da esfera e no exterior vem:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{\sigma 4\pi a^2}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \vec{u}_r \text{ [V/m]}$$

- b)  $r > a$

$$\phi_P = \int_P^\infty \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{a}{r}\right)^2 dr = \frac{\sigma}{\epsilon_0} a^2 \left[-\frac{1}{r}\right]_r^\infty = \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 r}$$

- $r < a$

$$\phi_P = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_z^a \vec{0} \cdot d\vec{\ell} + \int_a^\infty \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} a$$

- c)

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi a^2 \sigma}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} a} = 4\pi \epsilon_0 a = \frac{2}{3} \times 10^{-3} \text{ [F]}$$

- d)

$$\begin{aligned} U &= q_+ \phi_+ + q_- \phi_- = q \frac{\sigma}{\epsilon_0} a^2 \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = q \frac{\sigma}{\epsilon_0} a^2 \left( \frac{1}{b + \frac{d}{2} \sin \theta} - \frac{1}{b - \frac{d}{2} \sin \theta} \right) \\ &\simeq q \frac{\sigma}{\epsilon_0} a^2 \frac{1}{b} \left[ \left( 1 - \frac{d}{2b} \sin \theta \right) - \left( 1 + \frac{d}{2b} \sin \theta \right) \right] \simeq -q \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left( \frac{a}{b} \right)^2 d \sin \theta \end{aligned}$$

- e) O momento da força sobre o dipolo:

$$N = -\frac{\partial U}{\partial \theta} = -q \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left( \frac{a}{b} \right)^2 d \cos \theta$$

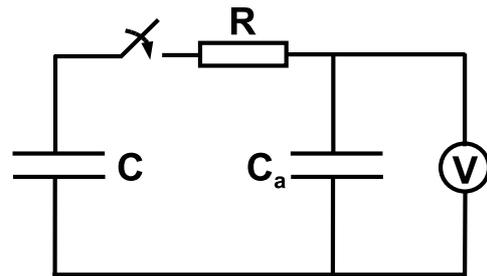
Os pontos de equilíbrio do dipolo determinam-se para  $N = \mathbf{0}$ , ou seja  $\theta = \pm 90$  graus. O ponto de equilíbrio estável corresponde ao ponto de energia mínima, uma vez que o sistema se encontra isolado; ou seja,  $\theta = 90$  graus.

**2.** Um condensador de placas circulares de raio  $R = 6 \text{ cm}$ , que se encontram separadas de uma distância  $d = 0,1 \text{ mm}$  por um meio dielétrico de permitividade relativa  $\epsilon_r = 10$ , é ligado a uma fonte de tensão com  $V = 100 \text{ V}$ .

- a) [1,5 ] Derive a capacidade do condensador.  
 b) [1,0 ] Calcule a carga eléctrica armazenada pelo condensador.  
 c) [1,5 ] Calcule a força entre as armaduras.

De seguida liga-se o condensador a um voltímetro de acordo com a montagem da figura, onde  $C_a = 0,1 \mu\text{F}$ .

- d) [1,0 ] Calcule a tensão que se observa no voltímetro, após se fechar o circuito e este atingir o regime estacionário.



### Correcção

- a) Tendo em conta a relação entre o campo eléctrico e a carga armazenada nas armaduras,

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = Q_{liv} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

e o campo eléctrico (uniforme) e a diferença de potencial aplicada:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V \Rightarrow \vec{E} = \frac{V}{d}$$

pode-se obter a densidade de carga armazenada nas armaduras em função da diferença de potencial aplicado:

$$\sigma = \epsilon \frac{V}{d}$$

A capacidade do condensador vem:

$$C = \frac{Q}{V} = \epsilon \frac{\pi R^2}{d} = 10^{-8} [F]$$

- b)

$$Q = \sigma \pi R^2 = \epsilon \frac{V}{d} \pi R^2 = 10^{-6} [C]$$

- c) A energia armazenada pelo condensador pode-se expressar em função da distância ( $z$ ) entre as armaduras, como sendo:

$$U(z) = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{\epsilon V^2}{2} \pi R^2$$

A força:

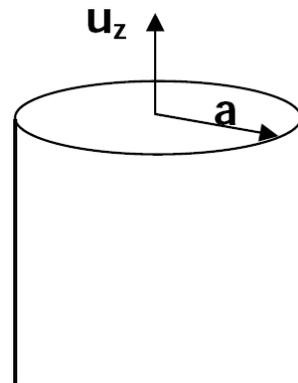
$$F_z = + \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=d} = - \frac{\epsilon V^2}{2 d^2} \pi R^2 = -0.5 [N]$$

d) No regime estacionário os condensadores estão carregados, não havendo qualquer corrente no circuito ( $\mathbf{V}_R = \mathbf{0}$ ). A carga armazenada inicialmente no condensador C ( $Q_0^C$ ) redistribui-se:

$$\begin{aligned}Q_0^C &= Q_1^C + Q_1^{C_a} \\CV &= CV_f + C_a V_f \\V_f &= \frac{C}{C + C_a} V \\&\simeq \frac{C}{C_a} V = 10 \text{ [V]}\end{aligned}$$

**3.** Um condutor cilíndrico de raio  $a$  é percorrido por uma corrente estacionária  $I$  uniformemente distribuída. A permeabilidade magnética do material condutor é dada por  $\mu = \mu_0(2 - \frac{r}{a})$ .

- a) [0,5 ] Determine a densidade de corrente eléctrica.
- b) [1,5 ] Determine o campo magnético  $\vec{B}$  no interior do condutor.
- c) [1,0 ] Determine a magnetização  $\vec{M}$  do condutor. Esboce a magnetização em função do raio  $r$  e determine a região onde esta é máxima.
- d) [1,0 ] Determine as correntes de magnetização.
- e) [1,0 ] Determine o coeficiente de auto-indução do cabo por unidade de comprimento.



————— Correção —————

a)

$$I = \int_s \vec{J} \cdot \vec{n} dS$$

Como a corrente está uniformemente distribuída e paralela ao eixo do condutor:

$$I = \int_s J dS = J \int_s dS = J \pi a^2$$

$$\vec{J} = \frac{I}{\pi a^2} \vec{u}_z$$

b) Como o problema tem geometria cilíndrica podemos aplicar a lei de Ampère, tomando um caminho circular no interior do condutor:

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int \vec{J} \cdot \vec{n} dS \Leftrightarrow H 2\pi r = J \pi r^2$$

$$\vec{H} = \frac{I r}{2\pi a^2} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \left(2 - \frac{r}{a}\right) \frac{I r}{2\pi a^2} \vec{u}_\theta$$

c)

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \Leftrightarrow \vec{M} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right) \vec{H}$$

$$\vec{M} = \frac{I}{2\pi a^2} \left(r - \frac{r^2}{a}\right) \vec{u}_\theta$$

$$M(0) = 0$$

$$M(a) = 0$$

$$\frac{dM}{dr} = 0 \Leftrightarrow r = \frac{a}{2}$$

O gráfico da magnetização é então uma parábola invertida com valor zero na origem e na superfície do condutor, com um máximo no seu ponto médio.

d)

$$\vec{M} = M(r) \vec{u}_\theta$$

$$\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [rM_\theta(r)] \vec{u}_z$$

$$\vec{J}_M = \vec{M}(a) \times \vec{n}_{ext} = \mathbf{0}$$

e)

$$U_M = \frac{1}{2} LI^2$$

$$u_M = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \left(2 - \frac{r}{a}\right) r^2 \left(\frac{I}{2\pi a^2}\right)^2$$

$$U_M = \int_v u_M dv = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{I}{2\pi a^2}\right)^2 \left(2r^2 - \frac{r^3}{a}\right) r dr d\theta dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\mu_0}{20\pi} \cdot I^2$$

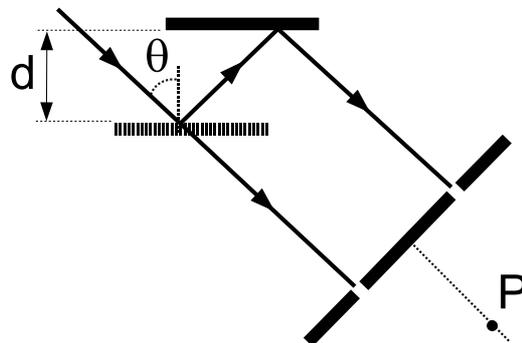
$$L = \frac{3\mu_0}{20\pi}$$

4. O Sol é um reactor de fusão nuclear libertando energia através dos processos de fusão de núcleos leves em núcleos mais pesados. Uma grande fracção da radiação libertada possui comprimentos de onda na região do espectro visível. Essa radiação é despolarizada, isto é, a sua polarização é aleatória e muda constantemente (dura cerca de  $10^{-16}$  s). Num dia de boa exposição solar a intensidade de radiação que chega à Terra e que corresponde à média da potência que atravessa a atmosfera terrestre é aproximadamente  $10^3 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ .

Para se realizarem experiências com luz monocromática e polarizada faz-se passar a radiação solar por um filtro que deixa passar somente luz vermelha ( $\lambda = 500 \text{ nm}$ ) polarizada linearmente. A sua intensidade medida num detector é  $I = 15/\pi \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ .

- a) [1] | Determine as amplitudes dos campos eléctrico e magnético da luz vermelha.
- b) [1] | Escolhendo para eixo ZZ a direcção de propagação da onda, escreva uma expressão para o campo eléctrico associado à onda.  
*Nota: pode escolher o eixo de polarização que julgar mais adequado.*
- c) [1] | Escreva a expressão do campo magnético  $\vec{B}$  associado à onda.
- d) [1] | Admita que a luz vermelha incide na superfície de separação entre o ar e uma tina de água salgada (índice de refração  $n = 1,3$ ) de tal forma que o campo eléctrico é paralelo ao plano de incidência. Determine o ângulo de incidência  $\theta$  para o qual não existe luz vermelha reflectida.

- e) [1] | Admita agora que em vez de incidir na tina de água, a luz vermelha passa por um sistema de espelhos separados de uma distância  $d = 125 \text{ nm}$  e por uma dupla fenda, tal como é mostrado na figura. Qual o ângulo de incidência no espelho semitransparente (reflecte 50% e transmite 50%) para que um observador colocado no ponto  $P$  não veja luz vermelha (interferência destrutiva)?



### Correcção

a)

$$I = \langle S \rangle = \langle \mathbf{E} \mathbf{H} \rangle = c\epsilon_0 \langle E^2 \rangle$$

Como a onda está polarizada linearmente:

$$I = c\epsilon_0 \left\langle E_0^2 \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \right\rangle = c\epsilon_0 E_0^2 \frac{1}{2}$$

$$E_0 = 60 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = 2 \times 10^{-7} \text{ T}$$

b) Escolhendo como direção de polarização de  $\vec{E}$  o eixo xx,

$$\vec{E} = 60 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x$$

$$k = 4\pi \times 10^6 \text{ rad.m}^{-1}$$

$$\omega = 12\pi \times 10^{14} \text{ rad.s}^{-1}$$

c)

$$\vec{n} = \frac{\vec{E}}{E} \times \frac{\vec{B}}{B}$$

$$\vec{B} = 2 \times 10^{-7} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y$$

d) De acordo com o enunciado do problema, o ângulo pretendido é o ângulo de Brewster:

$$\theta_B = \arctg\left(\frac{1,3}{1}\right)$$

e) Para existir interferência destrutiva a diferença de caminho entre os dois raios terá de ser um múltiplo de meios comprimentos de onda, ou seja, um múltiplo de 250 nm. Se os espelhos estão colocados com uma distância de 125 nm, uma diferença de percurso de "ida e volta" de um dos raios será precisamente 250 nm. Basta então fazer a luz incidir com um ângulo de 0 graus e colocar o detector paralelo aos espelhos.

NOTA: a diferença de percurso para um ângulo de incidência arbitrário  $\Delta\ell = 2d\cos\theta$  (demonstrar como exercício), cuja solução para o nosso caso particular resulta também em  $\theta=0$ .