Mestrado em Eng. Electrotécnica e de Computadores (MEEC)

Electromagnetismo e Óptica

1º semestre de 2009-2010

31 de Outubro de 2009 (10h00)

Prof. Filipe Mendes
Prof. Fernando Barão
Prof. Luís Lemos Alves
Prof. Manuela Mendes

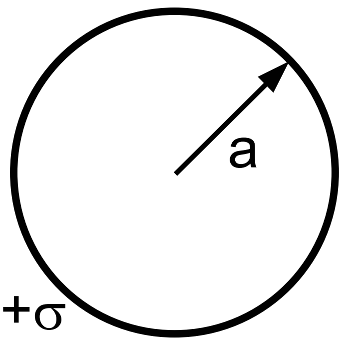
Resolução do 1º Teste

- Na realização do teste/exame não são permitidas máquinas de calcular e telemóveis.
- Identifique claramente todas as folhas do exame.
- Resolva os grupos em páginas separadas

Duração do Teste: 1h30

---

1. Considere a película esférica condutora de raio $\boldsymbol{a}$ e espessura desprezável, indicada na figura, que se encontra carregada com uma densidade de carga $+\boldsymbol{\sigma}$ e imersa no ar.



a) [1,5] Detalhando todos os cálculos efectuados, determine a expressão do campo eléctrico $\vec{\boldsymbol{E}}$ dentro e fora da superfície esférica ($\boldsymbol{r} < \boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{r} > \boldsymbol{a}$).

b) [1,5] Determine a expressão do potencial eléctrico $\boldsymbol{\phi}$ dentro e fora da superfície esférica ($\boldsymbol{r} < \boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{r} > \boldsymbol{a}$), considerando como ponto de referência o centro da película esférica ($\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$).

c) [0,5] Determine a energia potencial electrostática da película esférica.

Considere agora que a película esférica é colocada dentro de um tanque com água destilada, material dieléctrico de permitividade $\boldsymbol{\varepsilon}$, de forma a ficar bastante afastada das paredes do tanque (pode considerar-se que as paredes estão no infinito).

d) [0,5] Explique porque é diferente neste caso o campo eléctrico fora da esfera e obtenha a sua expressão.

e) [1,0] Determine a carga de polarização da água junto à superfície da película esférica.

Correcção

1.a) Como o problema tem simetria esférica pode usar-se a lei de Gauss. Dentro da esfera o campo é nulo pois nenhuma superfície fechada terá carga no seu interior. No exterior o campo deveria ser encontrado aplicando detalhadamente (o que não será feito nesta resolução) a lei de Gauss com uma superfície esférica de raio $\boldsymbol{r}$, genérico. A solução é :

$$\boldsymbol{r < a \ : \ E = 0}$$

$$\boldsymbol{r > a \ : \ \vec{E} = \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r^2}\ \vec{u}_r}$$

1.b) Usando como ponto de referência o centro da superfície esférica,

$$\begin{aligned} r < a \ : \quad & \phi(r) = \int_r^0 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_r^0 0 \, d\ell = 0 \\ r > a \ : \quad & \phi(r) = \int_r^0 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_r^a \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r^2} dr + \phi(a) = \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right] + 0 = \frac{\sigma a(a-r)}{\varepsilon_0 r} \end{aligned}$$

1.c) A energia de um sistema em equilíbrio electrostático é igual ao trabalho necessário para o constituir. Estando, neste caso, toda a carga ao mesmo potencial, essa energia é dada pela expressão:

$$U_E = \frac{1}{2} Q \phi(a)_\infty$$

Em que o potencial tem de ser em relação ao infinito uma vez que ao constituir o sistema se têm de trazer as cargas de um local onde se supõe que estejam livres:

$$\phi(a)_\infty = \int_a^\infty \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}$$

Então

$$U_E = \frac{1}{2} 4\pi a^2 \sigma \phi(a)_\infty = \frac{2\pi \sigma^2 a^3}{\varepsilon_0}$$

1.d) O campo eléctrico fora da esfera é diferente pois a água fica polarizada e ao campo eléctrico criado pela carga que está na película esférica soma-se agora o campo eléctrico criado pela carga de polarização da água. Utilizando a lei de Gauss generalizada, de uma maneira idêntica ao realizado em 1a), obter-se-ia neste caso:

$$r > a \ : \ \vec{E} = \frac{\sigma a^2}{\varepsilon r^2} \, \vec{u}_r$$

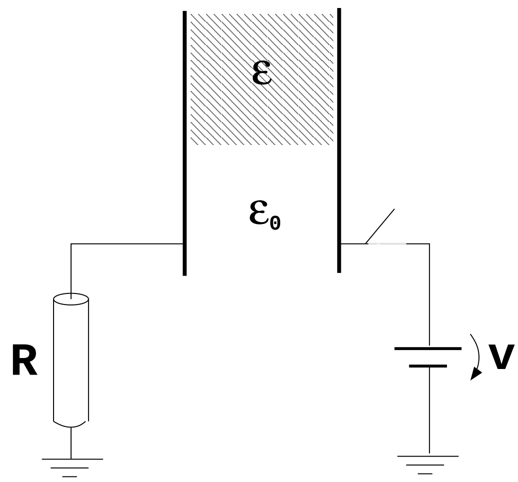
1.e) A densidade de carga de polarização junto à superfície da película esférica (embora não fosse pedido, em volume ela é nula) é dada por:

$$\sigma_{pol} = \vec{P}(a) \cdot \vec{n}_{ext} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \vec{E}(a) \cdot \vec{n}_{ext} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} \frac{\sigma a^2}{a^2} \, \vec{u}_r \cdot (-\vec{u}_r) = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} \sigma$$

A carga de polarização será então

$$Q_{pol} = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} 4\pi a^2 \sigma$$

2. Considere um condensador de faces paralelas, quadradas, de área $\boldsymbol{S}$ e separadas de $\boldsymbol{d}$, cujo interior está <u>semi-preenchido</u> por um material isolante cuja permitividade eléctrica é ε, tal como se mostra na figura. O condensador é ligado à Terra, através de um cilindro condutor de resistência $\boldsymbol{R}$, e a uma bateria de diferença de potencial $\boldsymbol{V}$, através de um interruptor. Determine, após se fechar o interruptor e o condensador ficar carregado:



a) [0,5] o potencial a que se encontra a armadura do condensador que está ligada à resistência $\boldsymbol{R}$;

b) [1,0] o campo eléctrico no interior do condensador, em cada um dos materiais que o preenchem (dieléctrico e ar);

c) [1,0] a carga armazenada pelo condensador;

d) [0,5] a capacidade do condensador;

e) [1,0] a energia gasta pela bateria para carregar o condensador.

Considere que a resistência consiste num cilindro condutor de raio $\boldsymbol{a}$ e comprimento $\boldsymbol{\ell}$, feito de um material cuja condutividade eléctrica é $\boldsymbol{\sigma_c}$.

f) [1,0] Detalhando todos os cálculos efectuados, determine a expressão da resistência do cilindro.

Correcção

2.a) Após o condensador se ter carregado atinge-se um equilíbrio electrostático. Nesse caso, o potencial da armadura ligada à resistência é idêntico ao da Terra, ou seja, nulo.

2.b) A diferença de potencial entre as as armaduras é dada por:

$$V = \int \vec{E} \cdot \vec{d\ell}$$

e é igual por um caminho através do ar ou através do isolante. Além disso, sendo o campo criado por planos (aproximadamente infinitos se $\boldsymbol{d}$ pequeno) uniforme, podemos escrever:

$$V = \int_0^d E_{ar}\, d\ell = \int_0^d E_{isolante}\, d\ell = E\, d$$

$$E_{ar} = E_{isolante} = E = \frac{V}{d}$$

2.c) Aplicando a lei de Gauss generalizada da forma habitual à armadura positiva do condensador, no ar e no isolante (utilizando um cilindro...), obtemos:

$$D_{ar} = \sigma_{ar} \Leftrightarrow \sigma_{ar} = \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 \frac{V}{d}$$
$$D_{isolante} = \sigma_{isolante} \Leftrightarrow \sigma_{isolante} = \varepsilon E = \varepsilon \frac{V}{d}$$

onde $\boldsymbol{\sigma_{ar}}$ e $\boldsymbol{\sigma_{isolante}}$ representam a densidade de carga na armadura, respectivamente, na zona preenchida por ar e na zona preenchida pelo isolante.

A carga pode ser obtida multiplicando as densidades pela área de cada uma das zonas:

$$\boldsymbol{Q = \sigma_{ar}\frac{S}{2} + \sigma_{isolante}\frac{S}{2} = \frac{SV}{2d}(\varepsilon + \varepsilon_0)}$$

2.d)

$$\boldsymbol{C = \frac{Q}{V} = \frac{S}{2d}(\varepsilon + \varepsilon_0)}$$

2.e) Comecemos por notar que a fonte realiza mais trabalho que a energia final do condensador, uma vez que no processo também há energia dissipada na resistência por efeito de Joule. No entanto, é fácil constatar que o trabalho da fonte correspondeu ao transporte de uma carga $\boldsymbol{Q}$ (a carga final do condensador) contra uma diferença de potencial $\boldsymbol{V}$. assim, o trabalho realizado pela fonte será simplesmente

$$\boldsymbol{W = QV = \frac{SV^2}{2d}(\varepsilon + \varepsilon_0)}$$

2.f) O cálculo da resistência do cilindro pode ser realizado sem ter em conta o circuito deste problema, uma vez que $\boldsymbol{R}$ é uma característica intrínseca do cilindro. Trata-se pois do cálculo habitual para esta geometria, que pode ser consultado, por exemplo, na página 55 das folhas da cadeira. O resultado é a expressão bem conhecida:

$$\boldsymbol{R = \frac{1}{\sigma_c}\frac{\ell}{\pi a^2}}$$