Mestrado em Eng. Electrotécnica e de Computadores (MEEC)

Electromagnetismo e Óptica

1º semestre de 2009-2010

5 de Janeiro de 2010 (10h00)

Prof. Filipe Mendes
Prof. Fernando Barão
Prof. Luís Lemos Alves
Prof. Manuela Mendes

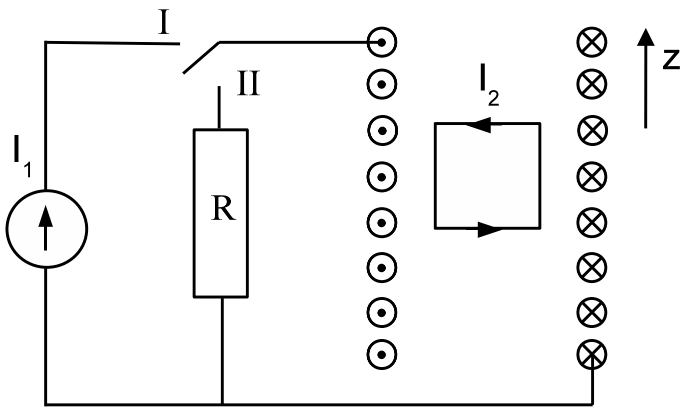
2º Teste

- Durante a realização do teste não é permitido o uso de telemóveis.
- Identifique claramente todas as folhas do teste.
- Resolva os grupos em páginas separadas

Duração do Teste: 1h30

---

1. Considere uma bobine muito comprida, de raio $\boldsymbol{a}$, comprimento $\boldsymbol{\ell}$, densidade de espiras $\boldsymbol{n}$ e preenchida por ar. A bobine está montada no circuito da figura e encontra-se ligada à fonte de corrente $\boldsymbol{I_1}$ (interruptor na posição $\boldsymbol{I}$).



a) [1,5] Determine, detalhando os cálculos efectuados, o campo magnético no seu interior.

b) [1,0] Determine o seu coeficiente de auto-indução.

No interior da bobine é colocada uma espira quadrada de lado $\boldsymbol{b}$ e percorrida por uma corrente $\boldsymbol{I_2}$, de acordo com a figura.

c) [1,0] Determine o coeficiente de indução mútua do sistema.

d) [0,5] Desprezando o campo magnético da espira quadrada, determine a energia magnética do sistema.

e) [1,0] Determine a força que a bobine exerce sobre cada um dos quatro lados da espira.

Num dado instante o interruptor é mudado para a posição $\boldsymbol{II}$, desligando a bobine da fonte e ligando-a à resistência $\boldsymbol{R}$.

f) [1,0] Determine a equação diferencial que descreve a evolução da corrente da bobine no tempo e indique qual a sua condição inicial ($\boldsymbol{i(0)}$).

Soluções:

1a) O campo calcula-se utilizando a lei de Ampère como habitualmente para esta geometria (o aluno deve detalhar todos os passos). O resultado é:

$\vec{B} = \mu_0 n I_1 \vec{u}_z$

1b) O fluxo do campo calculado na alínea 1a) que atravessa a bobine pode ser obtido calculando primeiro o fluxo sobre uma única espira da bobine e multiplicando depois pelo número total de espiras da bobine (o fluxo é igual em cada uma delas). Para uma espira temos:

$$\Phi = \int_{espira} \vec{B} \cdot \vec{n} dS = B\pi a^2$$

Para $n\ell$ espiras temos

$$\Phi = n\ell B\pi a^2 = \mu_0 n^2 \ell \pi a^2 I_1$$

O coeficiente de auto-indução é então:

$$L = \frac{\Phi}{I_1} = \mu_0 n^2 \ell \pi a^2$$

1c) O coeficiente de indução mútua pode ser calculado a partir do fluxo do campo magnético criado pela bobine que atravessa a espira. Como esse fluxo é nulo, uma vez que o campo é perpendicular à normal à espira, também $M = 0$

1d) A energia magnética do sistema é:

$$U_M = \frac{1}{2} L I_1^2 + \frac{1}{2} L_{espira} I_2^2 + M I_1 I_2 \simeq \frac{1}{2} L I_1^2$$

1e) Para calcular a força sobre um lado da espira vamos usar a expressão da força de Laplace:

$$d\vec{F} = I_2 d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

É fácil constatar que nos lados verticais (segundo zz) a força é nula pois os elementos de corrente são paralelos ao campo.

No lado superior da espira temos $dF = I_2 B d\ell$ com direcção para trás do plano do desenho

No lado superior da espira temos $dF = I_2 B d\ell$ com direcção para a frente do plano do desenho

O módulo da força que actua cada um destes lados da espira é obtido integrando a força de Laplace:

$$F = \int_0^b dF = I_2 B b$$

1f) Como não há indução mútua entre a bobine e a espira, temos um circuito RL simples em que se parte de uma situação em que existe na bobine uma corrente I_1. Assim, aplicando a lei das malhas:

$$v_R + v_L = 0 \Leftrightarrow Ri + L\frac{di}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0$$

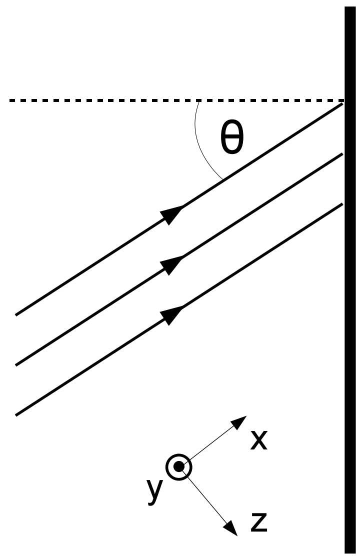
O facto de a corrente não poder ser descontínua numa bobine (a força electromotriz induzida depende da derivada da corrente...) indica-nos que a condição inicial é $i(0) = I_1$.

2. Um veículo de exploração submarina utiliza um feixe laser de frequência f_0 nas suas actividades subaquáticas. A água onde o veículo se desloca possui uma permitividade eléctrica $\varepsilon = 2\varepsilon_0$ e uma permeabilidade magnética μ_0. Determine:

a) [0,5] a velocidade de propagação das ondas electromagnéticas que compôem o laser em unidades de velocidade da luz no vácuo (c);

b) [1,0] o comprimento de onda do laser na água.

Admita agora que as ondas electromagnéticas emitidas possuem uma polarização linear segundo o eixo zz, que se propagam ao longo do eixo xx e que possuem um campo eléctrico de amplitude E_0.



c) [0,5] Escreva a expressão do campo eléctrico associado às ondas electromagnéticas.

d) [1,0] Determine a expressão do campo magnético associado às ondas electromagnéticas.

e) [1,0] Determine a intensidade das ondas electromagnéticas numa superfície plana quando o ângulo de incidência do laser é θ (ver figura).

Soluções:

2a) $v^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu} = \frac{1}{2\varepsilon_0\mu_0} = \frac{c^2}{2} \rightarrow v = \frac{c}{\sqrt{2}}$

2b) $\lambda f_0 = v \rightarrow \lambda = \frac{v}{f_0} = \frac{c}{\sqrt{2} f_0}$

2c) $\vec{E} = E_0 sen\,(\omega t - \kappa x)\,\vec{u}_z$

Como:
$\omega = 2\pi f_0$

$\kappa = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{c} f_0$

vem:
$\vec{E} = E_0 sen\left(2\pi f_0 t - \frac{2\sqrt{2}\pi}{c} f_0 x\right)\vec{u}_z$

2d) $\vec{B} = \frac{1}{v}\left(\vec{n} \times \vec{E}\right) = -\frac{E_0\sqrt{2}}{c} sen\left(2\pi f_0 t - \frac{2\sqrt{2}\pi}{c} f_0 x\right)\vec{u}_y$

2e) A intensidade da radiação na superfície é dada por:

$I = <\vec{S}\cdot\vec{n}> = v < 2\varepsilon_0 E^2 > \vec{u}_z \cdot \vec{u}_n = \frac{c}{\sqrt{2}}\varepsilon_0 E_0^2 \cos\theta$