Mestrado em Eng. Electrotécnica e de Computadores (MEEC)

Electromagnetismo e Óptica

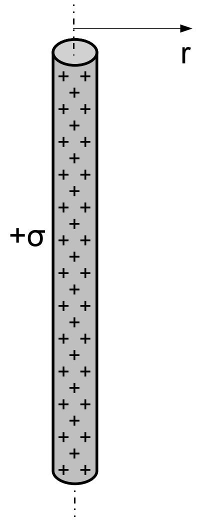
1º semestre de 2009-2010

8 de Janeiro de 2010 (9h00)

Prof. Filipe Mendes
Prof. Fernando Barão
Prof. Luís Lemos Alves
Prof. Manuela Mendes

- Na realização do Exame não são permitidas máquinas de calcular e telemóveis.
- Identifique claramente todas as folhas do exame.
- Resolva os grupos em páginas separadas

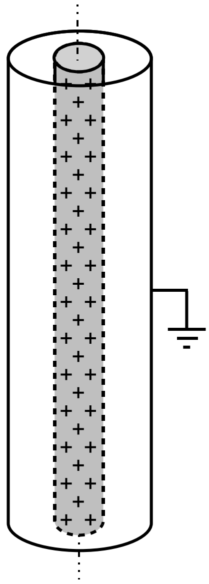
Duração do Exame: 2h30



1. Considere um cilindro de plástico muito comprido, de raio $\boldsymbol{a}$ e de permitividade eléctrica $\boldsymbol{\varepsilon}$. O cilindro, que se encontra imerso em ar, foi electrizado por fricção tendo adquirido uma densidade de carga superficial $+\boldsymbol{\sigma}$.

a) [1,5] Detalhando todos os cálculos efectuados, determine o campo eléctrico $\vec{\boldsymbol{E}}$ dentro e fora do cilindro ($\boldsymbol{r} < \boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{r} > \boldsymbol{a}$).

b) [1,5] Determine o potencial eléctrico $\boldsymbol{\phi}$ dentro e fora do cilindro ($\boldsymbol{r} < \boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{r} > \boldsymbol{a}$), considerando como referência um ponto localizado no seu eixo longitudinal ($\boldsymbol{r} = \mathbf{0}$).



Considere agora que se envolve o cilindro com uma película cilíndrica condutora de raio $\boldsymbol{b}$, ligada à Terra. Determine:

c) [1,0] a densidade de carga superficial da película, $\boldsymbol{\sigma_p}$;

d) [1,0] a energia potencial electrostática de um comprimento $\boldsymbol{\ell}$ do conjunto (cilindro plástico e película condutora);

e) [1,0] a pressão a que está sujeita a película condutora.

Solução:

1a) Devido à distribuição de carga (sobre a superfície de um cilindro infinito), o campo eléctrico é dado por:

$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$.

Aplica-se o Teorema de Gauss, utilizando como superfície gaussiana um cilindro de raio r ($r > a$ ou $r < a$) e altura h, coaxial com o cilindro de plástico.

Note-se que a carga interior é $Q_{\text{int}} = 0$ se $r < a$ e $Q_{\text{int}} = 2\pi a h \sigma$ se $r > a$.

1b) $\phi = \begin{cases} \phi_{\text{ref}} = 0\,, r < a \\ \frac{a\sigma}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{a}{r}\right)\,, r \geq a \end{cases}$

1c) No exterior do sistema o potencial é constante (igual ao da Terra) e o campo é nulo, portanto:

$\sigma_p = -\sigma\frac{a}{b}$

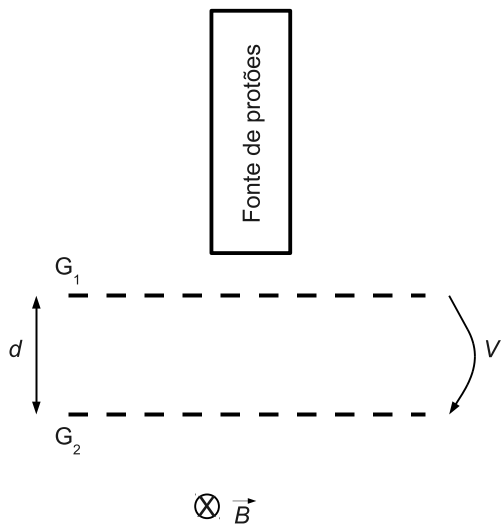
1d)

$$U_E = \frac{1}{2}\int\int\int \varepsilon_0 E^2 dV = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^l dz \int_a^b \varepsilon_0 E^2 r dr = \frac{\pi l a^2 \sigma^2}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

1e) $p = \frac{F_r}{S} = \frac{-\frac{dU_E}{db}}{2\pi b l} = -\frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{\sigma^2 a^2}{b^2}$

Trata-se de uma compressão.

2. Um acelerador linear de protões é constituído por duas grelhas metálicas, G_1 e G_2, distanciadas de d e sujeitas a uma diferença de potencial V, que produzem um campo eléctrico uniforme. Os protões (carga q_p e massa m_p) são gerados por uma fonte junto da grelha G_1 (ver figura). A fonte produz n protões por unidade de tempo e os protões são produzidos essencialmente em repouso ($v \simeq 0$). Determine:



a) [0,5] a corrente eléctrica produzida pela fonte de protões;

b) [0,5] o campo eléctrico no espaço entre as grelhas;

c) [0,5] a velocidade dos protões quando atingem a grelha G_2.

Após sairem do acelerador, os protões entram numa zona onde existe um campo magnético uniforme, tal como é mostrado na figura.

d) [1,0] Determine o raio de curvatura da trajectória dos protões na zona onde existe o campo magnético.

e) [1,0] Esboce graficamente a trajectória de um protão nas zonas em que existem os campos eléctrico e magnético.

Solução:

2a) $I = nq_p$

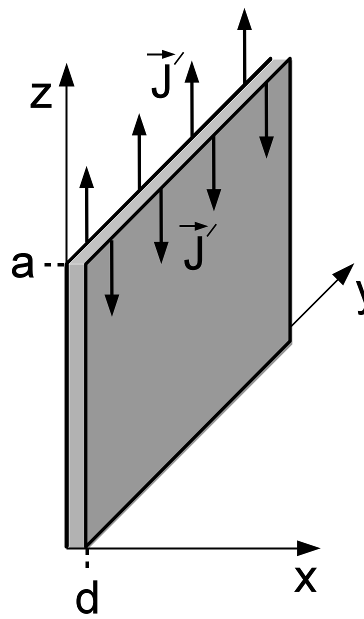
2b) $E = \frac{V}{d}$

2c) $T_{G2} = \frac{1}{2}m_p v_p^2 \Longrightarrow v_{G2} = \sqrt{\frac{2q_p V}{m_p}}$

2d)

$$\begin{aligned} F_m = F_{\text{cfga}} \quad &\Longrightarrow \quad q_p v_{G2} B = m_p \frac{v_{G2}^2}{R} \\ &\Longrightarrow \quad R = \sqrt{\frac{2m_p V}{q_p B^2}} \end{aligned}$$

3. Considere um sistema constituído por dois planos condutores quadrados de lado a, separados por uma distância $d << a$, tal como se mostra nas figuras (modelo simplificado de um guia de micro-ondas rectangular). Nos condutores circulam, em sentidos opostos, correntes estacionárias I com uma densidade superficial $\vec{J}\,' = \pm I/a\ \vec{u}_z$. O espaço entre os condutores encontra-se preenchido por um material de permeabilidade magnética μ. Determine:



a) [1,5] detalhando todos os cálculos efectuados, o campo magnético, $\vec{B}$, nas três regiões do espaço: $x < 0$, $0 < x < d$ e $x > d$;

Nota: Se não fez esta alínea considere nas seguintes que, para $0 < x < d$, o módulo do campo magnético é dado por $B = kJ'$, sendo k uma constante positiva

b) [1,0] a energia magnética armazenada no interior sistema;

c) [1,0] o coeficiente de auto-indução do sistema;
Sugestão: utilize o resultado da alínea b)

d) [1,0] o vector magnetização, no interior do material ($0 < x < d$);

e) [1,0] as correntes de magnetização no material.

Solução:

3a) Devido à distribuição de corrente (sobre as superfícies de dois planos infinitos), o campo magnético é $\vec{B} = B\vec{u}_y$, com $B = \text{const}$.

Aplica-se a lei de Ampère generalizada (entre os planos existe um material magnético), utilizando como contorno de circulação um quadrado de lado h cuja superfície tem normal segundo $\vec{u}_z$.

Note-se que a corrente interior é $I_{\text{int}} = 0$ se o quadrado intersepta os dois planos e $I_{\text{int}} = J'h$ se o quadrado intercepta apenas o plano $x = 0$.

$$\vec{B} = \begin{cases} 0\,\vec{u}_y\,, x < 0 \text{ e } x > d \\ \mu J'\,\vec{u}_y\,, 0 < x < d \end{cases}$$

3b) $U_M = \frac{1}{2}\int\int\int \frac{B^2}{\mu} dV = \frac{\mu a^2 d}{2} J'^2$

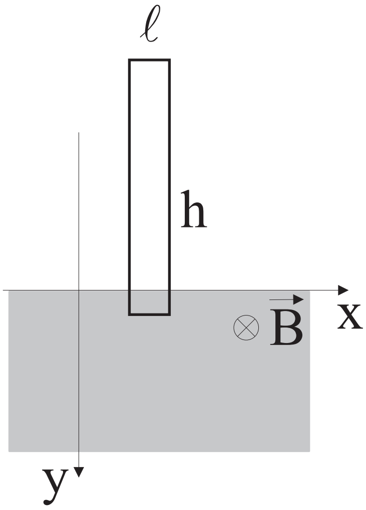
3c) $U_M = \frac{1}{2} I\phi = \frac{1}{2} L I^2 \Longrightarrow L = \mu d$

3d) $\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{M} + \frac{\vec{B}}{\mu} \right) \Longrightarrow \vec{M} = J' \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \vec{u}_y$

3e)

$$\begin{aligned} \vec{J}_M &= \vec{\nabla} \times \vec{M} = 0 \\ \vec{J}'_M &= \vec{M} \times \vec{n}_{\text{ext}} = \vec{M} \times (\pm \vec{u}_x) = \pm J' \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \vec{u}_z \end{aligned}$$

4. Um circuito rectangular rígido de massa m, lado ℓ e altura $h >> \ell$ cai verticalmente sob a acção da aceleração da gravidade, g. Num dado instante o circuito entra numa região onde existe um campo magnético $\vec{B}$ com direcção perpendicular ao plano do circuito, como mostra a figura. O circuito é suficientemente alto para se poder considerar que durante o tempo da experiência o lado superior do circuito não chega a entrar na região do campo magnético. A resistência eléctrica do circuito é R.



a) [1,5] Determine o módulo e o sentido da corrente eléctrica que circula no circuito em função da velocidade da queda, $v(t)$.

b) [1,5] Determine a força magnética que actua sobre o circuito eléctrico durante a queda. Discuta o seu efeito no movimento da espira.

c) [1,0] Determine a velocidade limite que o circuito pode atingir nas condições da experiência.

d) [1,0] Discuta qualitativamente que forças actuarão no circuito e quais as suas consequências no movimento da espira, após esta entrar completamente na região onde existe o campo magnético.

Solução:

4a) $I = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{1}{R} B l \frac{dy}{dt} = -\frac{B l v(t)}{R}$

A corrente tem sentido anti-horário.

4b) $\vec{F}_m = -I l B \vec{u}_y = -\frac{B^2 l^2 v(t)}{R} \vec{u}_y$

Esta força encontra-se aplicada no ramo inferior da espira e portanto trava o seu movimento. Existem forças aplicadas nos ramos lateriais da espira, com módulos iguais e sentidos $\pm \vec{u}_x$, que portanto se anulam.

4c) $v_{\text{lim}} : \vec{F}_g + \vec{F}_m = 0 \Longrightarrow v_{\text{lim}} = \frac{mgR}{B^2 l^2}$

4d) As cargas do circuito são actuadas por forças magnéticas $\vec{F}_m = qvB\vec{u}_x$.

Ocorrerá uma acumulação de cargas positivas no ramo direito do circuito e de cargas negativas no seu ramo esquerdo, sem que no entanto se estabeleça uma corrente eléctrica.

O circuito manterá o seu movimento uniformemente acelerado, devido à actuação da força gravítica.