



Prof. Filipe Mendes  
Prof. Fernando Barão  
Prof. Luís Lemos Alves  
Prof. Manuela Mendes

**2º Exame**

- Na realização do Exame não são permitidas máquinas de calcular e telemóveis.
- Identifique claramente todas as folhas do exame.
- Resolva os grupos em páginas separadas

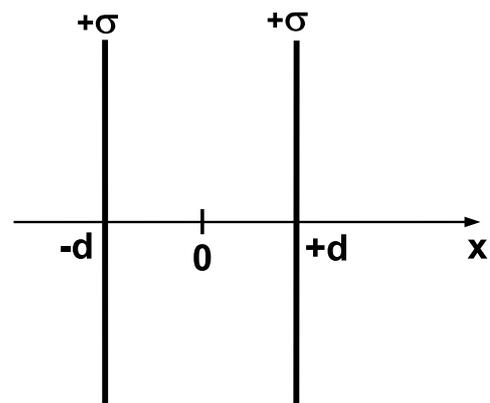
**Duração do Exame: 2h30****Cotação dos grupos: 1. [7,0], 2. [4,5], 3. [4,5], 4. [4,0]**

1. Considere o sistema representado na figura, constituído por duas placas condutoras de espessura desprezável, de área  $A$  colocadas nas posições  $+d$  e  $-d$  do eixo  $XX$  e que, para efeitos de cálculo do campo eléctrico, se podem considerar infinitas. Ambas as placas estão uniformemente carregadas com uma densidade de carga positiva  $+\sigma$ .

- a) [2,0] | Determine, detalhando todos os cálculos efectuados, a expressão do campo eléctrico,  $\vec{E}_{(+d)}$ , criado em todo o espaço ( $x < -d$ ,  $x > d$ ) pela placa colocada na posição  $x = +d$ .

R: O cálculo do campo eléctrico criado por um plano infinito é um dos casos em que se pode aplicar a lei de Gauss, detalhado na bibliografia da cadeira. O aluno deveria detalhar todos os passos da aplicação da lei de Gauss: direcção do campo, superfície utilizada, cálculo do integral. O resultado final é:

$$x > d, \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x$$
$$x < d, \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x$$



- b) 1,0 | Determine a expressão do campo eléctrico criado pelo conjunto das duas placas em todo o espaço ( $x < -d$ ,  $-d < x < +d$ ,  $x > d$ ),  $\vec{E}$ .

R: O campo criado pela segunda placa é semelhante ao da primeira. Utilizando o princípio da sobreposição:

$$x > d, \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x$$
$$-d < x < +d, \vec{E} = 0$$
$$x < -d, \vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x$$

c) [1,5 ] Tomando como ponto de referência a origem do referencial ( $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ), determine a expressão do potencial eléctrico criado pelas duas placas nas diferentes regiões do espaço.

R: num ponto genérico  $\mathbf{x}$  o potencial, tomando como referência o ponto  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , é dado por  $\phi = \int_x^0 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$

$$-d < x < +d, \phi = \int_x^0 0 dx = 0$$

$$x > d, \phi = \int_x^d \frac{\sigma}{\epsilon_0} dx + 0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}(d - x)$$

$$x < -d, \phi = \int_x^{-d} -\frac{\sigma}{\epsilon_0} dx + 0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}(d + x)$$

d) [1,0 ] Determine a capacidade do condensador formado pelas duas placas.

R:  $C = \frac{Q}{V}$ . No caso descrito no enunciado não há carga de influência por estarem as duas placas carregadas positivamente ( $V = 0$ ). Para calcular a capacidade do sistema é preciso pois considerar o caso em que uma das placas tem uma carga positiva e a outra o seu simétrico. Neste caso o campo eléctrico entre as placas pode ser calculado novamente com a lei de Gauss obtendo-se  $E = \frac{Q}{A\epsilon_0}$ . A diferença de potencial é então  $V = \frac{Q}{A\epsilon_0} 2d$  e a capacidade  $\frac{A\epsilon_0}{2d}$

e) [0,5 ] Determine a energia electrostática armazenada no condensador formado pelas duas placas.

R: No caso descrito no enunciado, não existindo campo eléctrico no espaço entre as placas, não existe energia electrostática armazenada.

f) [1,0 ] Determine a força que a placa colocada em  $\mathbf{x} = +d$  exerce sobre a outra.

R: usando o resultado da alínea a),

$$d\vec{F} = \sigma dA \vec{E}_{+d}$$

$$\vec{F} = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} A \vec{u}_x$$

**2.** Um cilindro de material ferromagnético, de raio  $a$  e comprimento  $L \gg a$ , é percorrido por uma corrente eléctrica de intensidade  $I$  uniformemente distribuída. A permeabilidade magnética do cilindro é  $\mu = \mu_0(2 - r/a)$ , sendo  $r$  a distância radial ao seu eixo.

a) [2,0 ] Determine, detalhando todos os cálculos efectuados, o campo magnético  $\vec{B}$  no interior e no exterior do cilindro ( $r < a$  e  $r > a$ ).

R: a geometria do problema permite a aplicação da lei de Ampère generalizada da forma habitual nas geometrias cilíndricas (que o aluno devia detalhar). A solução é:

$$r > a, \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

$$r < a, \vec{B} = \mu_0 \left(2 - \frac{r}{a}\right) r \frac{I}{2\pi a^2} \vec{u}_\theta$$

b) [1,0 ] Determine o vector de magnetização no cilindro,  $\vec{M}$ . Determine a região em que  $\vec{M}$  atinge o seu valor máximo.

R: Só há magnetização no interior do cilindro:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

$$\vec{M} = \left(1 - \frac{r}{a}\right) r \frac{I}{2\pi a^2} \vec{u}_\theta$$

$$\frac{dM}{dr} = 0 \rightarrow r = \frac{a}{2}$$

c) [1,0 ] Determine as densidades de corrente de magnetização no cilindro.

$$R: \vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M} = \frac{1}{r} \frac{drM}{dr} \vec{u}_z = \left(2 - \frac{3r}{a}\right) r \frac{I}{2\pi a^2}$$

$$M(a) = 0 \rightarrow \vec{J}_M' = 0$$

d) [0,5 ] Diga, justificando, qual a intensidade de corrente de magnetização que atravessa a secção do cilindro.

R: A corrente de magnetização total é zero uma vez que no exterior do cilindro a sua contribuição para o campo é também nula.

**3.** Um cilindro condutor de altura  $h$  e raio  $a$  está sujeito a uma campo magnético variável no tempo e uniforme no espaço,  $\vec{B} = \frac{2}{\omega} \cos(\omega t) \vec{u}_z$  [T], como se mostra na figura. O material do cilindro tem uma condutividade eléctrica  $\sigma_c$ . Determine:

a) [2,0 ] o campo eléctrico no interior do cilindro, em função da distância ao seu eixo longitudinal,  $r$ ; descreva detalhadamente todos os cálculos efectuados;

R: O campo eléctrico que vai existir no interior do cilindro é devido à indução magnética criada pelo campo magnético variável.

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot \vec{n} ds$$

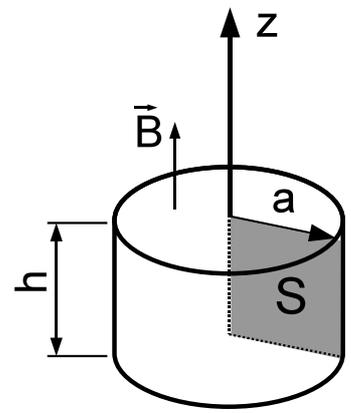
$$E \cdot 2\pi r = \pi r^2 2 \sin(\omega t)$$

em que a norma

$$\left| \begin{array}{l} \text{se não realizar esta alínea considere nas seguintes} \\ \vec{E} = E_0 r \cos(\omega t) \vec{u}_\theta \end{array} \right.$$

b) [1,0 ] a corrente eléctrica que percorre a secção  $S$  do cilindro (ver figura);

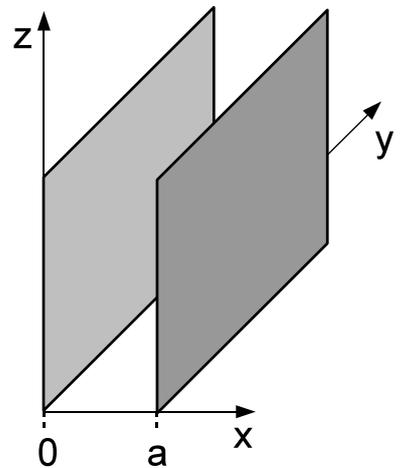
c) [1,5 ] a potência dissipada por efeito de Joule no cilindro (este é o princípio de funcionamento das placas de indução).



**4.** No transporte de sinais electromagnéticos na região das microondas ( $\lambda \sim \text{cm}$ ), a utilização de circuitos normais com fios deixa de ser apropriada, havendo a necessidade de se utilizarem guias de ondas. Consideremos o guia de ondas representado na figura, constituído por duas placas condutoras separadas de uma distância  $a$ , que podem ser consideradas infinitas. As placas são feitas de um material que é um condutor perfeito (pode considerar-se nulo o campo eléctrico no seu interior).

Vamos primeiro considerar microondas de frequência  $f_0$  que se propagam no ar segundo a direcção  $yy$ , com o seu campo eléctrico polarizado segundo a direcção  $zz$  e cuja amplitude é  $E_0$ .

a) [0,5 ] Determine a expressão que descreve o campo eléctrico das microondas.



Vamos agora considerar que estas microondas se propagam dentro do guia de ondas com uma amplitude máxima também igual a  $E_0$ . Tendo em atenção o facto de o campo eléctrico da onda se anular no interior condutor:

- b [1,0 ] escreva as equações de continuidade a que o campo eléctrico tem de obedecer na transição do ar para as placas metálicas do guia de ondas;
- c) [1,0 ] escreva a expressão do campo eléctrico das microondas no interior do guia de ondas. Admita que a amplitude varia sinusoidalmente entre as duas placas do guia de ondas;
- d) [1,5 ] escreva a equação de Maxwell que relaciona os campos eléctrico e magnético da onda e, a partir dela, encontre as equações que descrevem o campo magnético da onda,  $\vec{B}$ .

Electrostática

- $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$
- $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ N.m}^2.\text{C}^{-2}$
- $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$   
 $\nabla \times \vec{E} = 0$
- $\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = \int_V \rho_{liv} dv$   
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{liv}$
- $\oint_S \vec{P} \cdot \vec{n} dS = - \int_V \rho_{pol} dv$   
 $\rho_{pol} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$   
 $\sigma_{pol} = \vec{P} \cdot \vec{n}_{ext}$
- $\phi_P = \int_P^{Ref} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$   
 $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$
- $\vec{D} = \vec{P} + \epsilon_0 \vec{E}$   
 $\vec{D} = \epsilon_0(1 + \chi_E) \vec{E} = \epsilon \vec{E}$
- $Q = CV$
- $U_E = \left[ \frac{1}{2} \right] \sum_i q_i \phi_i$
- $u_E = \frac{1}{2} \epsilon E^2$   
 $U_E = \int_V u_E dv$
- $\vec{F}_s = \pm \frac{dU_E}{ds} \vec{u}_s$

Corrente eléctrica estacionária

- $\vec{J} = Nq\vec{v}$
- $\vec{J} = \sigma_c \vec{E}$
- $I = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS$
- $p = \vec{J} \cdot \vec{E}$
- $\oint_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS = - \frac{d}{dt} \int_V \rho dv$   
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \frac{d\rho}{dt}$

Ondas electromagnéticas

- $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$
- $\vec{n} = \frac{\vec{\kappa}}{\kappa} = \frac{\vec{E}}{E} \times \frac{\vec{B}}{B}$
- $\frac{E}{B} = v$
- $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$
- $\vec{u} = \vec{u}_E + \vec{u}_M$
- $I = \langle \vec{S} \cdot \vec{n} \rangle$

Magnetostática

- $\vec{B} = \int_{\Gamma} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{\ell} \times \vec{u}_r}{r^2}$   
 $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ H/m}$
- $d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}$
- $\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0$   
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
- $\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS$   
 $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$
- $\vec{B} = \mu_0(\vec{M} + \vec{H})$   
 $\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu\vec{H}$
- $\oint_{\Gamma} \vec{M} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J}_M \cdot \vec{n} dS$   
 $\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}$   
 $\vec{J}'_M = \vec{M} \times \vec{n}_{ext}$

Interacção de partículas e campos

- $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

Campos variáveis e indução

- $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$   
 $\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- $\Phi_i = L_i I_i + M_{ij} I_j$
- $U_M = \left[ \frac{1}{2} \right] \sum_i \Phi_i I_i$
- $u_M = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$   
 $U_M = \int_V u_M dv$
- $\vec{F}_s = \pm \frac{dU_M}{ds} \vec{u}_s$
- $\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS$   
 $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

## Algumas Primitivas

$$\int \frac{dx}{(x^2 + b)^{3/2}} = \frac{1}{b} \frac{x}{\sqrt{x^2 + b}} \qquad \int \frac{x dx}{(x^2 + b)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + b}}$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + b}} = \sqrt{x^2 + b} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + b})$$

$$\int \frac{dx}{x(x + a)} = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{x}{x + a}\right)$$

Para o cálculo analítico de integrais pode ser consultado o endereço web: <http://integrals.wolfram.com>

## Coordenadas cartesianas $(x, y, z)$

$$d\vec{l} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$$

$$dS = dx dy$$

$$dV = dx dy dz$$

$$\vec{\nabla} F = \left( \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (A_x, A_y, A_z)$$

## Coordenadas polares $(r, \theta)$

$$d\vec{l} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta$$

$$dS = r dr d\theta$$

## Coordenadas cilíndricas $(r, \theta, z)$

$$d\vec{l} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

$$dV = r dr d\theta dz$$

$$\vec{\nabla} F = \left( \frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

## Coordenadas esféricas $(r, \theta, \phi)$

$$d\vec{l} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \operatorname{sen}\theta d\phi \vec{u}_\phi$$

$$dV = r^2 dr \operatorname{sen}\theta d\theta d\phi$$

$$\vec{\nabla} F = \left( \frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial F}{\partial \phi} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\operatorname{sen}\theta A_\theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (A_\phi)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left[ \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial (\operatorname{sen}\theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial (\operatorname{sen}\theta A_\theta)}{\partial \phi} \right] \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r A_\phi)}{\partial r} \right] \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{u}_\phi$$

## Teorema da Divergência

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

## Teorema da Stokes

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{A} dS = \oint_\Gamma \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

## Identidades vectoriais

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$