Mestrado em Eng. Electrotécnica e de Computadores (MEEC)
**Electromagnetismo e Óptica**
2º semestre de 2009-2010
17 de Junho de 2010 (9h00)

Prof. Filipe Mendes
Prof. Fernando Barão

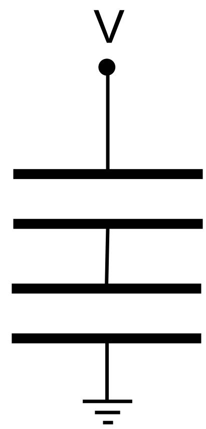
# 1º Exame com soluções

- Na realização do Exame não são permitidas máquinas de calcular e telemóveis.
- Identifique claramente todas as folhas do exame.
- Resolva os grupos em páginas separadas

**Duração do Exame: 2h30**

---

**1.** Considere dois condensadores de faces paralelas idênticos, constituídos por armaduras condutoras de área $\boldsymbol{A}$ separadas de uma distância $\boldsymbol{d}$ muito pequena em relação às dimensões das armaduras e preenchida com ar. Os condensadores são montados em série e ligados a uma fonte de tensão $\boldsymbol{V}$ que os carrega com uma carga $\boldsymbol{Q}$.




a) [1,5 ] Determine, detalhando todos os cálculos efectuados, o campo eléctrico no interior de um dos condensadores em função da carga da sua carga $\boldsymbol{Q}$.

**Solução:**
O aluno deveria aplicar a lei de Gauss a um condensador de faces paralelas e infinitas, detalhando todos os passos, incluindo a direcção do campo, a superfície utilizada, etc.

$E = \frac{Q}{A\varepsilon_0}$

b) [1,0 ] Expresse a carga armazenada em cada condensador em função da tensão da fonte e determine a capacidade de cada um dos condensadores.

**Solução:**
Sendo os condensadores iguais, cada um terá uma tensão de $\frac{V}{2}$:

$\frac{V}{2} = \int_0^d \vec{E} \cdot \vec{d\ell}$

$Q = \frac{VA\varepsilon_0}{2d}$

$C = \frac{Q}{\frac{V}{2}} = \frac{A\varepsilon_0}{d}$

c) [1,0 ] Determine a energia armazenada por cada um dos condensadores.

**Solução:**
$U_E = \frac{1}{2}C\left(\frac{V}{2}\right)^2 = \frac{A\varepsilon_0}{8}V^2$

Em seguida, retiram-se os condensadores da montagem, ainda carregados, e constrói-se um novo condensador colocando as duas armaduras carregadas positivamente a uma distância $\boldsymbol{d}$ entre si.


d) [1,5 ] Determine o campo eléctrico no interior e no exterior do condensador.

**Solução:**
O aluno poderia começar por calcular o campo criado por uma armadura carregada com uma carga $\boldsymbol{Q}$, utilizando a lei de gauss na aproximação do plano infinito:

$\boldsymbol{E = \frac{Q}{2A\varepsilon_0}}$, com a direcção perpendicular à armadura e sentido de afastamento da mesma.

O campo eléctrico em todo o espaço pode ser calculado por simples sobreposição vectorial do campo criado por cada uma das armaduras:

Dentro do condensador, $\boldsymbol{E = 0}$

Fora do condensador, $\boldsymbol{E = \frac{Q}{A\varepsilon_0}}$, com a direcção perpendicular às armaduras e sentido de afastamento das mesmas.

e) [1,0 ] Determine a força que existe entre as armaduras.

**Solução:**
a força que uma armadura sente tem a ver com o campo eléctrico criado pela outra armadura. Como o campo eléctrico criado por uma só armadura já foi calculado, a conta resulta bastante simples:

$\boldsymbol{F = Q_{uma\ armadura}\ E_{outra\ armadura} = \frac{Q^2}{2A\varepsilon_0}}$ (repulsiva)

f) [1,0 ] Relacione a força encontrada na alínea anterior com a variação de energia potencial do sistema, $\boldsymbol{dU_E}$, se uma das placas se afastar da outra uma distância $\boldsymbol{dx}$.

(Sugestão: comece por determinar $\boldsymbol{dU_E}$ em função de $\boldsymbol{dx}$)

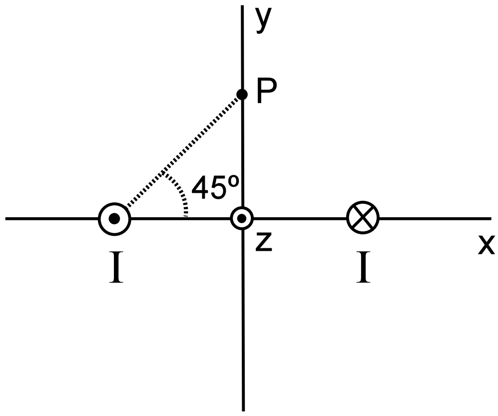
**Solução:**
$\boldsymbol{u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{Q^2}{2A^2\varepsilon_0}}$, fora do condensador (dentro a energia é nula)

$\boldsymbol{dU_E = -u_E\ dV}$ (se uma das armaduras se deslocar $\boldsymbol{dx}$ aumenta a zona em que não há campo nem energia e a energia total do sistema diminui)

$\boldsymbol{dU_E = -\frac{Q^2}{2A^2\varepsilon_0} A dx = -\frac{Q^2}{2A\varepsilon_0} dx}$

$\boldsymbol{-\frac{dU_E}{dx} = \frac{Q^2}{2A\varepsilon_0} = F}$ !

**2.** Considere um sistema constituído por dois fios condutores paralelos, infinitos e distanciados de $d$, percorridos por correntes de igual intensidade, $I$, e sentidos contrários.




a) [1,5 ] Determine, detalhando todos os cálculos efectuados, o campo magnético criado por um dos fios a uma distância $r$.

**Solução:**
Aplicando a lei de Ampère, tem-se:
$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \;\Rightarrow\; \vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi r} I \vec{u}_\theta$

b) [1,5 ] Determine a força exercida pelos fios no instante inicial, $\vec{F}$, sobre uma carga $q$ que seja lançada do ponto $P$ com uma velocidade $\vec{v} = v_0\, \vec{u}_z$.

**Solução:**
A força aplicada sobre a carga é dada por:
$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$.
O campo $\vec{B}$, corresponde ao campo produzido pelos dois fios no ponto $P$. Tendo em conta que o ponto $P$ se encontra a uma distância dos fios $r = \frac{d}{2cos(45^\circ)} = \frac{d}{\sqrt{2}}$ e que a resultante dos campos dos fios só possui projecção segundo $yy$, tem-se: $\vec{B} = 2\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\sqrt{2}}{d} I cos(45^\circ) = \frac{\mu_0}{\pi}\frac{I}{d}\vec{u}_y$
Vem finalmente para a força: $\vec{F} = qv_0\frac{\mu_0}{\pi}\frac{I}{d}(-\vec{u}_x)$

Suponha agora que os dois fios condutores são substituídos por dois feixes de partículas de carga $q_f$, de modo a produzirem a mesma intensidade de corrente eléctrica.

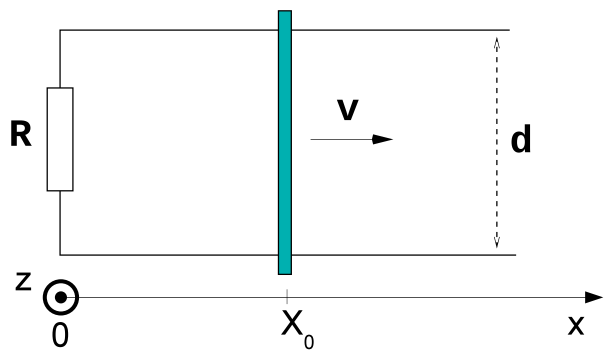
c) [1,0 ] Sendo $v_f$ a velocidade das partículas do feixe, determine a densidade linear de partículas do feixe, $\lambda_p$ [nº partículas.m$^{-1}$].

**Solução:**
$I = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{dx}\frac{dx}{dt} = \lambda_p q_f v_f \;\Rightarrow\; \lambda_p = \frac{I}{v_f q_f}$

d) [1,0 ] Explique qualitativamente como se alteravam os resultados das alíneas $a)$ e $b)$ nesta situação.

**Solução:**
Neste caso, existiria um campo eléctrico $\vec{E}$ (não esquecer que num condutor a matéria é neutra!), não havendo alteração do campo magnético (mesma intensidade de corrente), mas haveria alteração da força sobre a carga.

**3.** Dois carris condutores paralelos entre si, que se encontram a uma distância $d$, estão unidos numa das extremidade por um condutor. O circuito é fechado por uma barra condutora que desliza apoiada nos carris com uma velocidade constante $\vec{v} = v_0\vec{u}_x$, sem atrito, sob acção de uma força exterior. A resistência equivalente deste circuito é $R$. Existe um campo magnético $\vec{B} = B\vec{u}_z$ uniforme em toda a região ocupada pelo circuito. No instante inicial a barra encontra-se na posição $X_0$. Desprezando a auto-indução do circuito, determine:



a) [1,0 ] o fluxo do campo magnético através da superfície definida pelo circuito, $\boldsymbol{\Phi(t)}$;

**Solução:**

$\Phi(t) = \int_0^d \int_0^{x_0+vt} \vec{B} \cdot \vec{n} dS =$

$= Bd(x_0 + vt)$, em que se usou uma normal paralela ao campo magnético, pelo que o sentido positivo para a força electromotriz será o anti-horário.

b) [1,0 ] a intensidade $\boldsymbol{i(t)}$ e sentido da corrente induzida no circuito.

**Solução:**

$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bdv$

$I = -\frac{Bdv}{R}$, em que o sinal negativo significa que o sentido correcto da corrente será o horário

Vamos agora considerar o efeito da auto-indução do circuito. Seja $\boldsymbol{L(t)}$ o coeficiente de auto-indução do circuito no instante $\boldsymbol{t}$. Determine:

c) [1,0 ] o fluxo do campo magnético através da superfície definida pelo circuito, $\boldsymbol{\Phi(t)}$, em função da corrente que o percorre $\boldsymbol{i(t)}$;

**Solução:**
Neste caso, para além do fluxo criado pelo campo externo teremos também de considerar o fluxo criado pela corrente que percorre o próprio circuito:

$\Phi(t) = \Phi_{ext}(t) + L(t)i(t) = Bd(x_0 + vt) + L(t)i(t)$

d) [1,0 ] a equação diferencial que descreve a corrente que percorre o circuito.

**Solução:**

$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bdv - L(t)\frac{i(t)}{dt} - i(t)\frac{L(t)}{dt} = Ri(t)$

$\frac{di}{dt} + \left(\frac{R}{L} + \frac{\frac{dL}{dt}}{L}\right) i = -\frac{Bdv}{L}$

**4.** Um feixe de ondas electromagnéticas de frequência $\boldsymbol{f}$ propaga-se no ar ao longo do eixo dos $\boldsymbol{xx}$. O seu campo eléctrico tem uma amplitude $\boldsymbol{E_0}$ e encontra-se polarizado linearmente fazendo um ângulo de 45 graus com o eixo dos $\boldsymbol{yy}$. Este feixe é detectado por um fotomultiplicador cuja eficiência de detecção é de 20%.

a) [1,5 ] Escreva as equações que descrevem o campo eléctrico do feixe.

**Solução:**
$E_y = E_0 cos(45°) cos(2\pi f t - kx)$
$E_z = E_0 sen(45°) cos(2\pi f t - kx)$

com:

$cos(45°) = sen(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$k = \frac{2\pi f}{c}$

b) [1,0 ] Escreva as equações que descrevem o campo magnético do feixe.

**Solução:**

$\vec{B} = \frac{1}{c}(\frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E}) = \frac{\sqrt{2}E_0}{2c}(-cos(\omega t - kx)\vec{u}_y + cos(\omega t - kx)\vec{u}_z)$

c) [1,5 ] Sabendo que a intensidade de radiação detectada é de 200 mW.m$^{\mathbf{-2}}$, determine a intensidade de radiação emitida pela fonte e calcule a amplitude do campo eléctrico, $\boldsymbol{E_0}$.

**Solução:**
A intensidade de radiação emitida: $\boldsymbol{I_{emi} = \frac{I_{det}}{0{,}2} = 1}$ W.m$^{\mathbf{-2}}$

$$\boldsymbol{I_{emi} = \left\langle |\vec{S}| \right\rangle = \langle c\varepsilon_0 E_0^2 cos^2(\omega t - kx) \rangle = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^2}$$

$$\boldsymbol{E_0 = \sqrt{\frac{2}{c\varepsilon_0}}}$$