Mestrado em Eng. Electrotécnica e de Computadores (MEEC)

**Electromagnetismo e Óptica**

1º semestre de 2010-2011

13 de Novembro de 2010 (11h00)

Prof. Filipe Mendes
Prof. Luís Lemos Alves
Hugo Serôdio

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

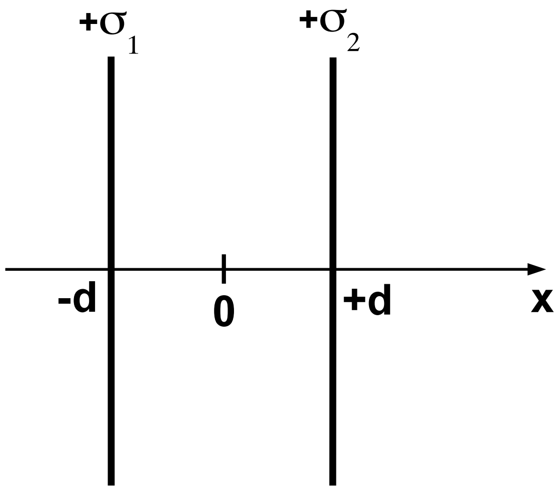
# 1º Teste

- Na realização do Teste não são permitidas máquinas de calcular e telemóveis.
- Identifique claramente todas as folhas do Teste.
- Resolva os grupos em páginas separadas

**Duração do Teste: 1h15**

---

**1.** Considere o sistema representado na figura, constituído por duas placas condutoras de espessura desprezável, de área $\boldsymbol{A}$ colocadas nas posições $+\boldsymbol{d}$ e $-\boldsymbol{d}$ do eixo $\boldsymbol{XX}$. Ambas as placas estão uniformemente carregadas e para efeitos de cálculo do campo eléctrico podem considerar-se infinitas . A placa **1**, colocada em $\boldsymbol{x = -d}$, tem uma densidade de carga positiva $+\boldsymbol{\sigma_1}$. A placa **2**, colocada em $\boldsymbol{x = d}$, tem uma densidade de carga positiva $+\boldsymbol{\sigma_2}$ ($\boldsymbol{\sigma_1 > \sigma_2}$).




a) [1,5 ] Determine, detalhando todos os cálculos efectuados, a expressão do campo eléctrico, $\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{x})$, criado em todo o espaço ($\boldsymbol{x < d},\ \boldsymbol{x > d}$) pela placa colocada na posição $\boldsymbol{x = +d}$.

R:
$\vec{E}_2 = -\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\,\vec{u}_x \quad x < d$
$\vec{E}_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\,\vec{u}_x \quad x > d$

b) 1,0 ] Determine a expressão do campo eléctrico criado pelo conjunto das duas placas em todo o espaço, $\vec{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{x})$ ($\boldsymbol{x < -d}$, $\boldsymbol{-d < x < +d}$, $\boldsymbol{x > d}$).

R:
$\vec{E} = -\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0}\,\vec{u}_x \quad x < -d$
$\vec{E} = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2\varepsilon_0}\,\vec{u}_x \quad -d < x < d$
$\vec{E} = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0}\,\vec{u}_x \quad x > d$

c) [1,0 ] Tomando como ponto de referência ($\boldsymbol{\phi = 0}$) o ponto do eixo $\boldsymbol{XX}$ de coordenada $\boldsymbol{x = +d}$, determine o potencial eléctrico da placa condutora colocada na coordenada $\boldsymbol{x = -d}$.

R:
$\phi(-d) = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{\varepsilon_0} d$

d) [1,5 ] Considere agora que as placas tem espessura, embora muito menor que as restantes dimensões. Determine a densidade de carga existente nas duas faces de cada uma das placas.

R:
Utilizando a lei de Gauss junto às superfícies de cada placa,
$\sigma(-d^-) = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$
$\sigma(-d^+) = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$
$\sigma(d^-) = \frac{-\sigma_1+\sigma_2}{2}$
$\sigma(d^+) = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$

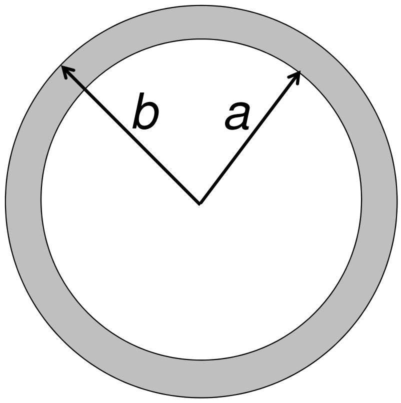
Nota: $\sigma(-d^-) + \sigma(-d^+) = \sigma_1$ e $\sigma(d^-) + \sigma(d^+) = \sigma_2$

e) [1,0 ] Supondo que o espaço entre as placas é preenchido por uma material de condutividade $\sigma_c$, determine a sua resistência à passagem da corrente eléctrica.

R:
$R = \frac{1}{\sigma_c}\frac{2d}{A}$

---

**2.** Considere um condensador cilíndrico de altura $\ell$, formado pelo enrolamento de duas folhas de alumínio de espessura desprezável, separadas por uma folha de papel de permitividade $\varepsilon$. A figura representa um corte transversal do sistema, onde a folha de papel (representada pela zona cinzenta) tem espessura $d = b - a \ll \ell$.




a) [1,5 ] Obtenha a expressão da capacidade do condensador. Justifique porque motivo a expressão obtida pode ser aproximada à da capacidade de um condensador plano $C = \frac{\varepsilon 2\pi a\ell}{d}$.
[NOTA: $\ln(1+x) \simeq x$, para $x \ll 1$.]

R:
$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln(b/a)}$
Aproximação condensador plano.
$d = b - a \ll l \Longrightarrow \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln\left(1 + \frac{d}{a}\right) \simeq \frac{d}{a} \Longrightarrow$
$C \simeq \frac{2\pi\varepsilon la}{d}$

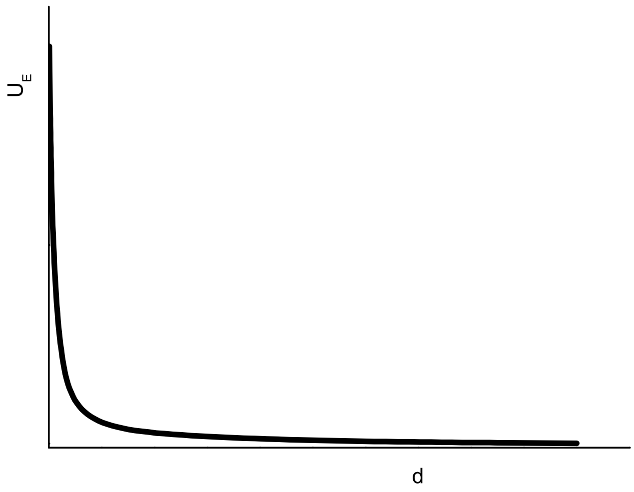
b) Ligam-se as armaduras do condensador (**que admitiremos plano**) a uma fonte de tensão constante $V$.

b1) [0,5 ] Admita que $V = 1$ V. Calcule o valor da carga $Q$ armazenada no condensador. Considere $\varepsilon = 3\varepsilon_0$, $a = 10$ mm, $d = 1$ mm, $\ell = 30$ cm.

R:
$Q = 0,5$ nC

b2) [1,0 ] Escreva a expressão da energia electrostática armazenada no condensador, e represente-a graficamente em função de $\boldsymbol{d}$.
Discuta fisicamente os limites $\boldsymbol{d \rightarrow 0}$ e $\boldsymbol{d \rightarrow \infty}$.

R:
$\boldsymbol{U_E = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{\pi l a \varepsilon V^2}{d}}$




$\boldsymbol{\lim_{d\rightarrow 0} U_E = \infty}$, porque neste caso o condensador poderia armazenar carga infinita (para o mesmo $\boldsymbol{V}$, se $\boldsymbol{d}$ tende para zero o campo tende para infinito pois num condensador plano $\boldsymbol{V = Ed}$).

$\boldsymbol{\lim_{d\rightarrow \infty} U_E = 0}$, porque neste caso não existe influência eléctrica mútua entre as armaduras do condensador (para o mesmo $\boldsymbol{V}$, se $\boldsymbol{d}$ tende para infinito o campo tende para zero e a carga também).

b3) [1,0 ] Utilize o resultado da alínea anterior para calcular a força electrostática (módulo, direcção e sentido) entre as armaduras do condensador.
Expresse o resultado em função da carga $\boldsymbol{Q}$ e do campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ existente entre as armaduras e interprete.

R:
Designando por $\boldsymbol{x}$ a distância entre as armaduras, a potencial constante a força entre as armaduras pode ser calculada através de
$\boldsymbol{\vec{F} = +\frac{dU_E}{dx} \vec{u}_x = -\frac{\pi l a \varepsilon V^2}{x^2} \vec{u}_x}$

No condensador real (cilíndrico), a direcção $\boldsymbol{\vec{u}_x}$ corresponde à direcção radial.

$\boldsymbol{\vec{F} = -\frac{2\pi l a \varepsilon V}{x} \frac{V}{2x} \vec{u}_x = -CV \frac{E}{2} \vec{u}_x = Q \frac{\vec{E}}{2}}$

concluindo-se assim que a força corresponde ao produto da carga da armadura colectora pelo campo criado na armadura colectora pela armadura condensadora (metade do campo total entre as armaduras).

## Electrostática

- $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r$
- $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times10^9 N.m^2.C^{-2}$
- $\oint_\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0$
  $\nabla\times\vec{E} = 0$
- $\oint_S \vec{D}\cdot\vec{n}\, dS = \int_V \rho_{liv}\, dv$
  $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{liv}$
- $\oint_S \vec{P}\cdot\vec{n}\, dS = -\int_V \rho_{pol} dv$
  $\rho_{pol} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$
  $\sigma_{pol} = \vec{P}\cdot\vec{n}_{ext}$
- $\phi_P = \int_P^{Ref} \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$
  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$
- $\vec{D} = \vec{P} + \varepsilon_0\vec{E}$
  $\vec{D} = \varepsilon_0(1+\chi_E)\vec{E} = \varepsilon\vec{E}$
- $Q = CV$
- $U_E = \left[\frac{1}{2}\right]\sum_i q_i\ \phi_i$
- $u_E = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$
  $U_E = \int_V u_E dv$
- $\vec{F}_s = \pm\frac{dU_E}{ds}\vec{u}_s$

## Corrente eléctrica estacionária

- $\vec{J} = Nq\vec{v}$
- $\vec{J} = \sigma_c\vec{E}$
- $I = \int_S \vec{J}\cdot\vec{n}\, dS$
- $p = \vec{J}\cdot\vec{E}$
- $\oint_S \vec{J}\cdot\vec{n}\, dS = -\frac{d}{dt}\int_V \rho dv$
  $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\frac{d\rho}{dt}$

## Ondas electromagnéticas

- $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$
- $\vec{n} = \frac{\vec{\kappa}}{\kappa} = \frac{\vec{E}}{E}\times\frac{\vec{B}}{B}$
- $\frac{E}{B} = v$
- $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$
- $u = u_E + u_M$
- $I = \left\langle\vec{S}\cdot\vec{n}\right\rangle$

## Magnetostática

- $\vec{B} = \int_\Gamma \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{\ell}\times\vec{u}_r}{r^2}$
  $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}H/m$
- $d\vec{F} = Id\vec{\ell}\times\vec{B}$
- $\oint_S \vec{B}\cdot\vec{n}\, dS = 0$
  $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$
- $\oint_\Gamma \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J}\cdot\vec{n}\, dS$
  $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}$
- $\vec{B} = \mu_0(\vec{M}+\vec{H})$
  $\vec{B} = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H} = \mu\vec{H}$
- $\oint_\Gamma \vec{M}\cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J}_M\cdot\vec{n}\, dS$
  $\vec{J}_M = \vec{\nabla}\times\vec{M}$
  $\vec{J}'_M = \vec{M}\times\vec{n}_{ext}$

## Interacção de partículas e campos

- $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$

## Campos variáveis e indução

- $\oint_\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\vec{n}\, dS$
  $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
- $\Phi_i = L_i I_i + M_{ij} I_j$
- $U_M = \left[\frac{1}{2}\right]\sum_i \Phi_i I_i$
- $u_M = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}$
  $U_M = \int_V u_M dv$
- $\vec{F}_s = \pm\frac{dU_M}{ds}\vec{u}_s$
- $\oint_\Gamma \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J}\cdot\vec{n}\, dS + \frac{d}{dt}\int_S \vec{D}\cdot\vec{n}\, dS$
  $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

## Óptica

- $n_1 sen\theta_1 = n_2 sen\theta_2$
- $tg\theta_B = \frac{n_2}{n_1}$

  interferência entre fendas
- $d sen\theta_{max} = m\lambda$
- $d sen\theta_{min} = m\lambda + \frac{\lambda}{m'}$ (m$'$ $\leq N$ e par)

  difracção
- $a sen\theta_{min} = m\lambda$

**Algumas Primitivas**

$$\int \frac{dx}{(x^2+b)^{3/2}} = \frac{1}{b}\frac{x}{\sqrt{x^2+b}} \qquad \int \frac{xdx}{(x^2+b)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+b}}$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+b}} = \sqrt{x^2+b} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+b}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x(x+a)} = \frac{1}{a}\ln(\frac{x}{x+a})$$

*Para o cálculo analítico de integrais pode ser consultado o endereço web: http://integrals.wolfram.com*

**Coordenadas cartesianas $(x, y, z)$**

$$d\vec{\ell} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{u}_z$$
$$dS = dx\,dy$$
$$dV = dx\,dy\,dz$$
$$\vec{\nabla}F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z},\right)\times(A_x, A_y, A_z)$$

**Coordenadas polares $(r, \theta)$**

$$d\vec{\ell} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta$$
$$dS = r\,dr\,d\theta$$

**Coordenadas cilíndricas (r, $\theta$, z)**

$$d\vec{\ell} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + dz\,\vec{u}_z$$
$$dV = r\,dr\,d\theta\,dz$$
$$\vec{\nabla}F = \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\,A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\,A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_z$$

**Coordenadas esfêricas $(r, \theta, \phi)$**

$$d\vec{\ell} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + r\,sen\theta\,d\phi\,\vec{u}_\phi$$
$$dV = r^2\,dr\,sen\theta\,d\theta\,d\phi$$
$$\vec{\nabla}F = \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial F}{\partial \phi}\right)$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(sen\theta A_\theta) + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}(A_\phi)$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left[\frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial(sen\theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial(sen\theta A_\theta)}{\partial \phi}\right]\vec{u}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{sen\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right]\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\vec{u}_\phi$$

**Teorema da Divergência**

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dV = \oint_S \vec{A}\cdot\vec{n}\,dS$$

**Teorema da Stokes**

$$\int_S \vec{\nabla}\times\vec{A}\,dS = \oint_\Gamma \vec{A}\cdot d\vec{\ell}$$

**Identidades vectoriais**

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$
$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0$$
$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$$