Mestrado em Eng. Electrotécnica e de Computadores (MEEC)

Electromagnetismo e Óptica

1º semestre de 2010-2011

11 de Dezembro de 2010 (10h00)

Prof. Filipe Mendes
Prof. Luís Lemos Alves
Hugo Serôdio

2º Teste

- Na realização do Teste não são permitidas máquinas de calcular e telemóveis.
- Identifique claramente todas as folhas do Teste.
- Resolva os grupos em páginas separadas

Duração do Teste: 1h15

---

1. Considere um solenóide com N espiras de raio a, comprimento $\ell \gg a$ e preenchido por um material de permeabilidade magnética μ. Considerando que o solenóide é percorrido por uma corrente estacionária I:

a) [1,5] determine o campo magnético no interior do solenóide;

R:
$B = \mu \frac{N}{\ell} I$
Com a direcção do eixo do solenóide.

b) [1,0] Mostre que o coeficiente de auto-indução L do solenóide é dado pela expressão

$$L = \mu \frac{N^2}{\ell} \pi a^2$$

R:
$\phi_{1espira} = \int_{1espira} \vec{B} \cdot \vec{n} dS$
$\phi = N \phi_{1espira}$
$L = \frac{\phi}{I}$

Considere agora que inicialmente o sistema não está alimentado e que no instante de tempo $t = 0$ se liga o solenóide a uma fonte de corrente estacionária de valor nominal I_0. Considere ainda que a resistência eléctrica do solenóide é R.

c) [1,5] Mostre que a corrente que circula no solenóide, $i(t)$, é dada pela expressão

$$i(t) = I_0 \left[1 - e^{-\frac{R}{L} t}\right]$$

e represente-a graficamente.

[Sugestão: comece por escrever a equação diferencial que descreve a evolução da corrente no sistema e a condição inicial do sistema.]

R:

$i_{\text{forçado}} = I_0$
$i_{\text{total}} = i_{\text{forçado}} + i_{\text{livre}} \Leftrightarrow i_{\text{livre}} = i_{\text{total}} - i_{\text{forçado}} = -I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$
substituindo-se i_{livre} na equação diferencial que pode ser obtida pela lei das malhas: $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0$ obtém-se uma proposição verdadeira.

d) [1,0] Obtenha as expressões da energia magnética U_M e da potência magnética P_M do solenóide ao longo do tempo e calcule os seus limites para $t \to \infty$.
Indique qual é a potência dissipada na resistência no limite $t \to \infty$ e explique o funcionamento do circuito ao longo do tempo.

R:

$$U_M(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) = \frac{1}{2}\mu \frac{N^2}{\ell}\pi a^2 I_0^2 \left[1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right]^2$$

$$P_M(t) = \frac{dU_M}{dt} = \mu \frac{N^2}{\ell}\pi a^2 I_0^2 \frac{R}{L}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$U_M(t \to \infty) = \frac{1}{2} L I_0^2$$

$$P_M(t \to \infty) = 0$$

$$P_R(t \to \infty) = R I_0^2$$

A fonte irá fornecer a energia magnética que irá ficar armazenada no interior da bobine. Com o decorrer do tempo, a bobina terá uma energia cada vez mais próxima do seu valor final e a corrente no circuito irá aumentar. No limite do tempo a tender para infinito, a bobina terá a sua energia final, que corresponde à corrente máxima que a fonte consegue impor ao circuito, a potência fornecida pela fonte à bobina será nula e toda a potência fornecida pela fonte será dissipada na resistência.

e) [1,0] Utilize a expressão de U_M para calcular a pressão magnética sobre o solenóide.

R:

$$P = \frac{F_r}{2\pi a \ell}$$

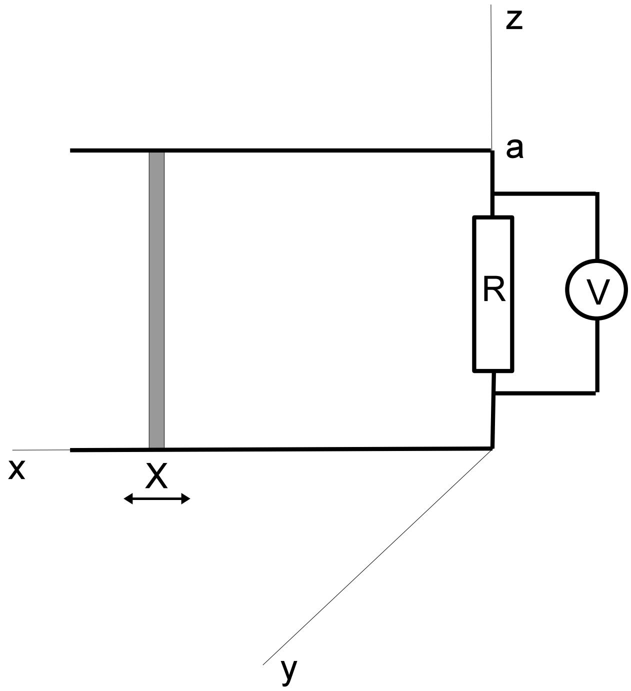
$$F_r = +\frac{dU_M}{da}\Big|_{I=const.}$$

$$P = \frac{1}{2}\mu \frac{N^2}{\ell^2} I_0^2 \left[1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right]^2$$

2. Considere uma espira rectangular com uma altura fixa $\boldsymbol{a}$ e com um lado móvel que lhe confere um comprimento variável $\boldsymbol{X}$, como se mostra na figura. A espira é atravessada pelo campo magnético de uma onda electromagnética plana, monocromática, que se propaga no ar com uma frequência angular $\boldsymbol{\omega = 3 \times 10^9\ rad.s^{-1}}$, e é descrito pela expressão:

$$\vec{B} = B_0 sen(\omega t + kx)\ \vec{u}_y$$

O fio condutor da espira tem resistência desprezável face ao valor de uma resistência eléctrica $\boldsymbol{R}$ inserida num dos seus lados fixos e a sua corrente é medida indirectamente através da tensão medida com um voltímetro nessa resistência.



a) [1,0] Qual o vector de onda, $\vec{k}$, desta onda electromagnética (incluindo o valor do seu módulo)?

R:

$\vec{k} \cdot \vec{r} = -kx \rightarrow \vec{k} = -k\vec{u}_x$

$k = \frac{\omega}{c} = 10$ rad.m^{-1}

b)[1,0] Determine a expressão do campo eléctrico desta onda electromagnética, $\vec{E}$.

R:

$\vec{E} = \frac{E}{B}\vec{B} \times \frac{\vec{k}}{k} = cB_0 sen(\omega t + kx)\ \vec{u}_z$

c)[1,0] Determine a expressão da força electromotriz induzida pelo campo magnético na espira em função da posição $\boldsymbol{X}$ do lado móvel.

R:

$\Phi = \int_0^a \int_0^X \vec{B} \cdot \vec{u}_y dx dz = \frac{B_0 a}{k}\left[cos(\omega t) - cos(\omega t + kX)\right]$

$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = B_0 a c \left[sen(\omega t) - sen(\omega t + kX)\right]$

d)[1,0] Sugira uma experiência para determinar o comprimento de onda desta onda electromagnética com esta montagem experimental.

R:

$X = \lambda \rightarrow \varepsilon = 0$ basta então procurar a primeira posição de $X \neq 0$ que torne $V = 0$ no voltímetro.

Electrostática

- $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r$
- $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9 N.m^2.C^{-2}$
- $\oint_\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0$
  $\nabla \times \vec{E} = 0$
- $\oint_S \vec{D}\cdot\vec{n}\, dS = \int_V \rho_{liv}\, dv$
  $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{liv}$
- $\oint_S \vec{P}\cdot\vec{n}\, dS = -\int_V \rho_{pol} dv$
  $\rho_{pol} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$
  $\sigma_{pol} = \vec{P}\cdot\vec{n}_{ext}$
- $\phi_P = \int_P^{Ref} \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$
  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$
- $\vec{D} = \vec{P} + \varepsilon_0\vec{E}$
  $\vec{D} = \varepsilon_0(1+\chi_E)\vec{E} = \varepsilon\vec{E}$
- $Q = CV$
- $U_E = \left[\frac{1}{2}\right]\sum_i q_i\ \phi_i$
- $u_E = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$
  $U_E = \int_V u_E dv$
- $\vec{F}_s = \pm\frac{dU_E}{ds}\vec{u}_s$

Corrente eléctrica estacionária

- $\vec{J} = Nq\vec{v}$
- $\vec{J} = \sigma_c\vec{E}$
- $I = \int_S \vec{J}\cdot\vec{n}\, dS$
- $p = \vec{J}\cdot\vec{E}$
- $\oint_S \vec{J}\cdot\vec{n}\, dS = -\frac{d}{dt}\int_V \rho dv$
  $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\frac{d\rho}{dt}$

Ondas electromagnéticas

- $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$
- $\vec{n} = \frac{\vec{\kappa}}{\kappa} = \frac{\vec{E}}{E}\times\frac{\vec{B}}{B}$
- $\frac{E}{B} = v$
- $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$
- $u = u_E + u_M$
- $I = \left\langle \vec{S}\cdot\vec{n}\right\rangle$

Magnetostática

- $\vec{B} = \int_\Gamma \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{\ell}\times\vec{u}_r}{r^2}$
  $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} H/m$
- $d\vec{F} = Id\vec{\ell}\times\vec{B}$
- $\oint_S \vec{B}\cdot\vec{n}\, dS = 0$
  $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$
- $\oint_\Gamma \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J}\cdot\vec{n}\, dS$
  $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}$
- $\vec{B} = \mu_0(\vec{M}+\vec{H})$
  $\vec{B} = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H} = \mu\vec{H}$
- $\oint_\Gamma \vec{M}\cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J}_M\cdot\vec{n}\, dS$
  $\vec{J}_M = \vec{\nabla}\times\vec{M}$
  $\vec{J}'_M = \vec{M}\times\vec{n}_{ext}$

Interacção de partículas e campos

- $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$

Campos variáveis e indução

- $\oint_\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\vec{n}\, dS$
  $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
- $\Phi_i = L_i I_i + M_{ij} I_j$
- $U_M = \left[\frac{1}{2}\right]\sum_i \Phi_i I_i$
- $u_M = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}$
  $U_M = \int_V u_M dv$
- $\vec{F}_s = \pm\frac{dU_M}{ds}\vec{u}_s$
- $\oint_\Gamma \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J}\cdot\vec{n}\, dS + \frac{d}{dt}\int_S \vec{D}\cdot\vec{n}\, dS$
  $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

Óptica

- $n_1 sen\theta_1 = n_2 sen\theta_2$
- $tg\theta_B = \frac{n_2}{n_1}$

  interferência entre fendas
- $d sen\theta_{max} = m\lambda$
- $d sen\theta_{min} = m\lambda + \frac{\lambda}{m'}$ (m$'$ $\leq N$ e par)

  difracção
- $a sen\theta_{min} = m\lambda$

Algumas Primitivas

$$\int \frac{dx}{(x^2+b)^{3/2}} = \frac{1}{b}\frac{x}{\sqrt{x^2+b}} \qquad \int \frac{xdx}{(x^2+b)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+b}}$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+b}} = \sqrt{x^2+b} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+b}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x(x+a)} = \frac{1}{a}\ln(\frac{x}{x+a})$$

Para o cálculo analítico de integrais pode ser consultado o endereço web: http://integrals.wolfram.com

Coordenadas cartesianas (x, y, z)

$$d\vec{\ell} = dx\,\vec{u}_x \ + \ dy\,\vec{u}_y + \ dz\,\vec{u}_z$$
$$dS = dx\,dy$$
$$dV = dx\,dy\,dz$$
$$\vec{\nabla}F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z},\right) \times (A_x, A_y, A_z)$$

Coordenadas polares (r, θ)

$$d\vec{\ell} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta$$
$$dS = r\,dr\,d\theta$$

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

$$d\vec{\ell} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + dz\,\vec{u}_z$$
$$dV = r\,dr\,d\theta\,dz$$
$$\vec{\nabla}F = \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\,A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\,A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_z$$

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

$$d\vec{\ell} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + r\,sen\theta\,d\phi\,\vec{u}_\phi$$
$$dV = r^2\,dr\,sen\theta\,d\theta\,d\phi$$
$$\vec{\nabla}F = \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial F}{\partial \phi}\right)$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(sen\theta A_\theta) + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}(A_\phi)$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left[\frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial(sen\theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial(sen\theta A_\theta)}{\partial \phi}\right]\vec{u}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{sen\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right]\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\vec{u}_\phi$$

Teorema da Divergência

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dV = \oint_S \vec{A}\cdot\vec{n}\,dS$$

Teorema da Stokes

$$\int_S \vec{\nabla}\times\vec{A}\,dS = \oint_\Gamma \vec{A}\cdot d\vec{\ell}$$

Identidades vectoriais

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$
$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0$$
$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$$