



Testes + Exame

- Na realização da prova não são permitidas máquinas de calcular e telemóveis.
- Identifique claramente todas as folhas do Teste.
- Resolva os grupos em páginas separadas

Duração do Teste: 1h15

Duração do Exame: 2h30

1º Teste: Grupos 1 e 2

2º Teste: Grupos 3 e 4

1. Considere o sistema representado na figura, constituído por dois condutores de forma esférica de raios a e b e de espessura desprezável. O condutor de raio a está uniformemente carregado com uma densidade de carga negativa $-\sigma$, o condutor de raio b está neutro e o espaço entre os condutores está preenchido com ar.

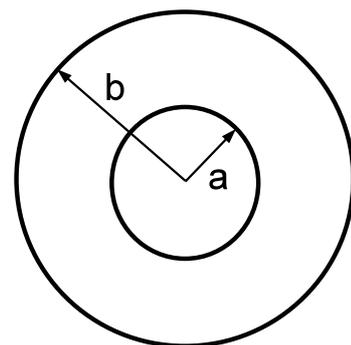
a) [1,5] Determine, detalhando todos os cálculos efectuados, a expressão do campo eléctrico, $\vec{E}(\mathbf{r})$, existente em todo o espaço ($r < a$, $a < r < b$, $r > b$).

R: Dada a simetria esférica do problema pode utilizar-se a lei de Gauss. As linhas de campo serão radiais em coordenadas esféricas e as superfícies fechadas a utilizar são superfícies também esféricas colocadas nas zonas onde se pretende calcular o campo. As normais a estas superfícies gaussianas são paralelas ao campo eléctrico, que se considerará genericamente segundo \vec{u}_r .

Para $r < a$ a carga no interior da superfície gaussiana é nula
 $\vec{E} = 0$

Para $a < r < b$ a carga no interior da superfície gaussiana é $Q = -\sigma 4\pi a^2$
 $\vec{E} = -\frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$

Para $r > b$ a carga no interior da superfície gaussiana é também $Q = -\sigma 4\pi a^2$ uma vez que o condutor exterior está neutro
 $\vec{E} = -\frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$



- b) [1,0] Determine a expressão do potencial eléctrico em todas as regiões do espaço, tomando para referência ($\phi = 0$) um ponto do condutor de raio b .

$$R: \phi = \int_r^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Para $r > b$ e $a < r < b$ (o campo eléctrico tem a mesma expressão):

$$\phi = \int_r^b -\frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \cdot d\vec{\ell} = \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{r} \right)$$

Note-se que apesar da expressão ser a mesma, para $r > b$ o potencial é positivo e para $r < b$ o potencial é negativo

Para $r < a$

$$\phi = \int_r^a 0 d\vec{\ell} + \int_a^b -\frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \cdot d\vec{\ell} = \phi(a) = \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

- c) [1,0] Diga, justificando, o que se alteraria nas alíneas a) e b) se o condutor de raio b for ligado à terra.

R: O potencial do condutor de raio b ficava idêntico ao da terra, ou seja, igual ao do infinito. Para que isto aconteça, o campo no exterior do condutor tem de ser nulo: o condutor de raio b deixava de estar neutro e passava a ter uma carga simétrica da do condutor de raio a . Para $r < b$ nada se alterava no problema.

- d) [1,5] Determine a capacidade do conjunto dos dois condutores.

R:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{-4\pi a^2 \sigma}{\phi(a) - \phi(b)} = \frac{4\pi \epsilon_0 a b}{b - a}$$

- e) [1,0] Supondo que o espaço entre os dois condutores é preenchido por um material de condutividade σ_c , determine a sua resistência à passagem de uma corrente eléctrica que se dirija de um condutor para o outro.

R:

$$R = \frac{V}{I}$$

$$V = \phi(a) - \phi(b) = \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

$$I = \int \vec{J} \cdot \vec{n} dS = \int \sigma_c \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \int \sigma_c \left(-\frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 r^2} \right) \vec{u}_r \cdot \vec{u}_r dS = -\frac{4\pi \sigma_c \sigma a^2}{\epsilon_0}$$

$$R = \frac{1}{\sigma_c} \frac{b-a}{4\pi a b}$$

2. Considere um condensador de faces paralelas e quadradas, de lado ℓ , separadas da distância d ($d \ll \ell$). O interior do condensador encontra-se preenchido por dois meios dielétricos ($\epsilon_2 > \epsilon_1$), ocupando cada um metade do volume disponível (ver figura). O condensador está ligado a uma fonte de tensão V .

- a) [1,0] Explique porque razão é o campo eléctrico idêntico nos dois dielétricos e como consegue a fonte garantir esta condição.

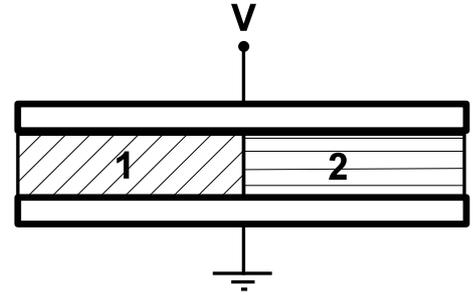
R: $d \ll \ell \Rightarrow E = C^{te}$.

Escolhendo um caminho fechado que passe pelos dois dielétricos

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Leftrightarrow \int \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = \int (E_1 - E_2) dl = 0$$

temos assim $E_1 = E_2$.

A fonte garante uma distribuição de cargas na placa condutora é diferente nas duas zonas.



- b) [1,0] Determine a expressão do campo eléctrico nos dielétricos.

R: Como o campo é uniforme,

$$V = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow E = \frac{V}{d}$$

- c) [1,0] Determine a densidade de energia em cada um dos dois dielétricos assim como a energia potencial electrostática armazenada pelo condensador.

$$R: u_{E_1} = \frac{1}{2} \epsilon_1 E_1^2 = \frac{1}{2} \epsilon_1 \left(\frac{V}{d} \right)^2$$

$$u_{E_2} = \frac{1}{2} \epsilon_2 E_2^2 = \frac{1}{2} \epsilon_2 \left(\frac{V}{d} \right)^2$$

$$U_E = \int \int \int (u_{E_1} + u_{E_2}) dV = \int_0^\ell \int_0^{\ell/2} \int_0^d \frac{1}{2} \left(\frac{V}{d} \right)^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2) dy dx dz = \frac{\ell^2 V^2}{4 d} (\epsilon_1 + \epsilon_2)$$

- d) [1,0] Um dielétrico de permitividade ϵ_3 , com $\epsilon_3 < \epsilon_2$, é inserido no sistema pelo lado do dielétrico 1, empurrando o dielétrico 2 para fora do condensador. Justifique qualitativamente, com base na variação da energia potencial electrostática do sistema, se a força eléctrica sentida por este terceiro dielétrico tenderá a puxá-lo para dentro do condensador ou a expulsá-lo para fora do condensador.

R:

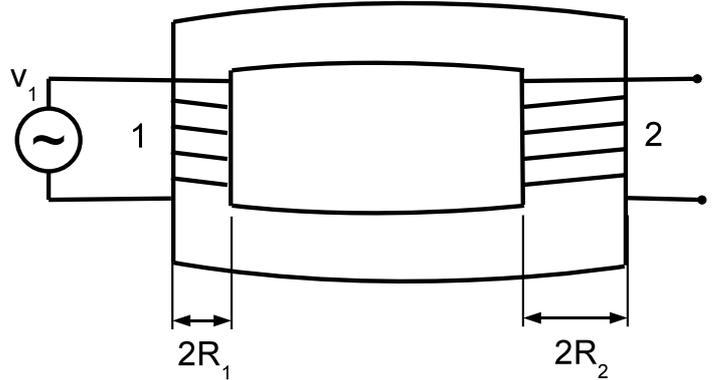
$$U_E^i = \frac{\ell^2 V^2}{4 d} (\epsilon_1 + \epsilon_2)$$

$$U_E^f = \frac{\ell^2 V^2}{4 d} (\epsilon_1 + \epsilon_3)$$

$\Delta U_E < 0$ porque $(\epsilon_1 + \epsilon_3) < (\epsilon_1 + \epsilon_2)$.

$F_x = + \frac{\Delta U_E}{\Delta x} < 0$ para um $\Delta x > 0$, logo a força expulsa o dielétrico 3.

3. Considere um transformador em que um núcleo de material ferromagnético de permeabilidade μ liga magneticamente dois solenóides **1** e **2** de N_1 e N_2 espiras, respectivamente. Os solenóides têm raios R_1 e R_2 e comprimento $\ell \gg R_1, R_2$, e o núcleo tem uma secção circular na zona dos solenóides. O solenóide **1** está ligado a uma fonte de tensão alterna $v_1(t)$ que lhe impõe uma corrente $i(t)$.



- a) [1,5] Determine, detalhando todos os cálculos efectuados, a expressão do campo magnético no interior do solenóide **1**, $B_1(t)$.

R: Atendendo a que se pode usar a aproximação do solenóide infinito, o campo é uniforme no interior do solenóide, com linhas de campo paralelas ao seu eixo, e nulo no exterior. Na presença de um material ferromagnético pode usar-se a lei de Ampère generalizada aplicando-a, por exemplo, sobre um contorno rectangular com um dos lados coincidente com a direcção do campo, dois deles perpendiculares ao campo e o último no exterior do solenóide.

$$B_1(t) = \mu \frac{N_1}{\ell} i(t)$$

- b) [0,5] Diga, justificando, em que condições se poderá assumir que todas as linhas do campo magnético existentes no interior do solenóide **1** atravessarão também as espiras do solenóide **2**.

R: Para que todas as linhas do campo magnético atravessassem os dois solenóides, podemos tentar garantir que as linhas do campo não saiam do material ferromagnético. Esta condição é equivalente a afirmar que na fronteira de separação entre o material e o ar, o campo não tem componente perpendicular (não sai). Na ausência de correntes, a lei de Ampère permite escrever a condição de fronteira:

$$B_{\perp fer} = B_{\perp ar} \Rightarrow \mu H_{\perp fer} = \mu_0 H_{\perp ar} \Leftrightarrow H_{\perp ar} = \frac{\mu_0}{\mu} H_{\perp fer} = 0$$

Esta condição poderá ser verificada se $\frac{\mu_0}{\mu} \simeq 0$, ou seja, $\mu \gg \mu_0$

- c) [1,0] Nas condições da alínea **b)**, determine a expressão do campo magnético no interior do solenóide **2**, $B_2(t)$.

R: Na condição em que todas as linhas do campo magnético atravessam os dois solenóides, o fluxo que atravessa cada uma das suas espiras é idêntico:

$$\Phi_{\text{espira 1}} = \Phi_{\text{espira 2}}$$

portanto,

$$B_2 = \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 B_1$$

d) [1,0] Determine o coeficiente de indução mútua do sistema.

$$\text{R: } \Phi_{21} = Mi(t) = N_2(B_2\pi R_2^2)$$

$$M = \mu \frac{N_1 N_2}{\ell} \pi R_1^2$$

e) [1,0] Qual a razão entre o número de espiras de cada solenóide, $\frac{N_1}{N_2}$, para que este transformador possa servir para utilizar um equipamento concebido para 110V na rede portuguesa, de 230V?

$$\text{R: } v_1 = N_1 \frac{d\Phi_{\text{espira 1}}}{dt}$$

$$v_2 = N_2 \frac{d\Phi_{\text{espira 2}}}{dt}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{23}{11}$$

4. Um pulso de N partículas carregadas (carga q e massa m), inicialmente em repouso, é acelerado numa **zona 1** por aplicação de uma diferença de potencial V . Seguidamente, após entrar numa **zona 2**, as partículas são submetidas à acção de um campo magnético uniforme B , perpendicular à sua velocidade, passando a descrever uma trajectória circular.

a) [1,0] Determine a velocidade das partículas v quando saem da **zona 1**.

$$\text{R: } E_c^i + E_p^i = E_c^f + E_p^f \Leftrightarrow qV = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\text{Logo } v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}.$$

b) [0,5] Mostre que o raio da trajectória circular é $R = \frac{mv}{qB}$.

$$\text{R: } F_c = F_m \Leftrightarrow m \frac{v^2}{R} = qvB$$

c) [1,0] Determine a intensidade da corrente elétrica I criada pelo movimento circular das partículas na **zona 2**.

$$\text{R: } I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}. \text{ Ao fim de uma volta } \Delta Q = Nq \text{ e } v = \frac{\Delta \ell}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta \ell}{v} = \frac{2\pi R}{v}.$$

$$\text{Logo } I = \frac{Nqv}{2\pi R}$$

d) [1,5] Determine a intensidade do campo magnético B_I criado pela corrente I no centro da trajectória das partículas.

$$\text{R: } \vec{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{u}_r}{r^2} = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{R^2} \vec{u}_z = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{u}_z$$

e) [1,0] Qual seria o tipo de trajectória e o seu novo raio de curvatura se o campo magnético aplicado às partículas mudasse de direcção, passando a fazer um ângulo de 60° com a velocidade das partículas.

$$R: F_c = F_m \Leftrightarrow m \frac{v^2}{R'} = qvB \sin 60^\circ$$

logo $R' = \frac{2}{\sqrt{3}}R$ (raio maior). A componente paralela de velocidade em relação ao campo \vec{B} impõe uma trajetória helicoidal.

Electrostática

- $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$
- $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ N.m}^2.\text{C}^{-2}$
- $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$
 $\nabla \times \vec{E} = 0$
- $\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = \int_V \rho_{liv} dv$
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{liv}$
- $\oint_S \vec{P} \cdot \vec{n} dS = - \int_V \rho_{pol} dv$
 $\rho_{pol} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$
 $\sigma_{pol} = \vec{P} \cdot \vec{n}_{ext}$
- $\phi_P = \int_P^{Ref} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$
 $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$
- $\vec{D} = \vec{P} + \epsilon_0 \vec{E}$
 $\vec{D} = \epsilon_0(1 + \chi_E) \vec{E} = \epsilon \vec{E}$
- $Q = CV$
- $U_E = \left[\frac{1}{2} \right] \sum_i q_i \phi_i$
- $u_E = \frac{1}{2} \epsilon E^2$
 $U_E = \int_V u_E dv$
- $\vec{F}_s = \pm \frac{dU_E}{ds} \vec{u}_s$

Corrente eléctrica estacionária

- $\vec{J} = Nq\vec{v}$
- $\vec{J} = \sigma_c \vec{E}$
- $I = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS$
- $p = \vec{J} \cdot \vec{E}$
- $\oint_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS = - \frac{d}{dt} \int_V \rho dv$
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \frac{d\rho}{dt}$

Ondas electromagnéticas

- $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$
- $\vec{n} = \frac{\vec{\kappa}}{\kappa} = \frac{\vec{E}}{E} \times \frac{\vec{B}}{B}$
- $\frac{E}{B} = v$
- $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$
- $u = u_E + u_M$
- $I = \langle \vec{S} \cdot \vec{n} \rangle$

Magnetostática

- $\vec{B} = \int_{\Gamma} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{\ell} \times \vec{u}_r}{r^2}$
 $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ H/m}$
- $d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}$
- $\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0$
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
- $\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS$
 $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$
- $\vec{B} = \mu_0(\vec{M} + \vec{H})$
 $\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu\vec{H}$
- $\oint_{\Gamma} \vec{M} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J}_M \cdot \vec{n} dS$
 $\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}$
 $\vec{J}'_M = \vec{M} \times \vec{n}_{ext}$

Interacção de partículas e campos

- $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

Campos variáveis e indução

- $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$
 $\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- $\Phi_i = L_i I_i + M_{ij} I_j$
- $U_M = \left[\frac{1}{2} \right] \sum_i \Phi_i I_i$
- $u_M = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$
 $U_M = \int_V u_M dv$
- $\vec{F}_s = \pm \frac{dU_M}{ds} \vec{u}_s$
- $\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS$
 $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Óptica

- $n_1 \text{sen}\theta_1 = n_2 \text{sen}\theta_2$
- $\text{tg}\theta_B = \frac{n_2}{n_1}$
interferência entre fendas
- $d \text{sen}\theta_{max} = m\lambda$
- $d \text{sen}\theta_{min} = m\lambda + \frac{\lambda}{m'}$ ($m' \leq N$ e par)
difracção
- $a \text{sen}\theta_{min} = m\lambda$

Algumas Primitivas

$$\int \frac{dx}{(x^2 + b)^{3/2}} = \frac{1}{b} \frac{x}{\sqrt{x^2 + b}} \qquad \int \frac{x dx}{(x^2 + b)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + b}}$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + b}} = \sqrt{x^2 + b} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + b})$$

$$\int \frac{dx}{x(x + a)} = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{x}{x + a}\right)$$

Para o cálculo analítico de integrais pode ser consultado o endereço web: <http://integrals.wolfram.com>

Coordenadas cartesianas (x, y, z)

$$d\vec{l} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$$

$$dS = dx dy$$

$$dV = dx dy dz$$

$$\vec{\nabla} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (A_x, A_y, A_z)$$

Coordenadas polares (r, θ)

$$d\vec{l} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta$$

$$dS = r dr d\theta$$

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

$$d\vec{l} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

$$dV = r dr d\theta dz$$

$$\vec{\nabla} F = \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

$$d\vec{l} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \operatorname{sen}\theta d\phi \vec{u}_\phi$$

$$dV = r^2 dr \operatorname{sen}\theta d\theta d\phi$$

$$\vec{\nabla} F = \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial F}{\partial \phi} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\operatorname{sen}\theta A_\theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (A_\phi)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left[\frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial(\operatorname{sen}\theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial(\operatorname{sen}\theta A_\theta)}{\partial \phi} \right] \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} \right] \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{u}_\phi$$

Teorema da Divergência

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

Teorema da Stokes

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{A} dS = \oint_\Gamma \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

Identidades vectoriais

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$