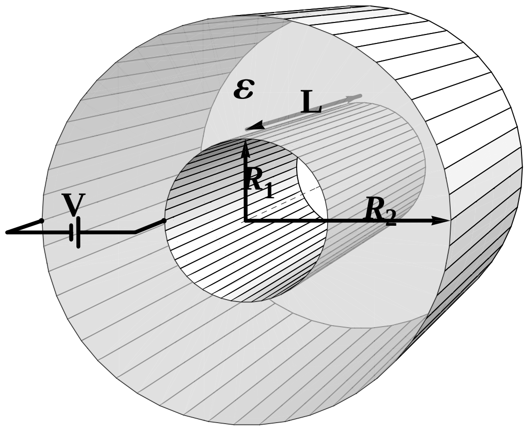
Prof. Jorge Romão (Responsável)
Prof. Fernando Barão
Prof. Amaro Rica da Silva

1º Teste

Problema 1

1. Considere um condensador cilíndrico formado por duas superfícies condutoras cilíndricas, com eixos coincidentes, de raios $\boldsymbol{R_1}$ e $\boldsymbol{R_2}$ e com espessura desprezável conforme indicado na figura. O comprimento do condensador é $\boldsymbol{L \gg R_1, R_2}$. O espaço entre os condutores está preenchido por um dielétrico de permitividade $\boldsymbol{\epsilon}$. O espaço interior ao condutor de raio $\boldsymbol{R_1}$ é o vazio. O condensador encontra-se ligado a uma bateria que mantém a diferença de potencial $\boldsymbol{V = \phi(R_1) - \phi(R_2) > 0}$.



a) [2,0] Determine os campos $\vec{D}$ e $\vec{E}$ em todos os pontos do espaço entre $\mathbf{0} < r < \infty$, onde r é a distância ao eixo, em função da densidade de carga por unidade de comprimento, $\boldsymbol{\lambda}$, existente no condutor interior.

b) [2,0] Determine a densidade de carga por unidade de comprimento, $\boldsymbol{\lambda}$, em função da diferença de potencial $\boldsymbol{V}$.

No caso de não ter realizado a alínea b), derive os resultados que se seguem em termos da carga por unidade de comprimento, $\boldsymbol{\lambda}$.

c) [2,0] Determine o vector polarização $\vec{P}$ e as densidades de carga de polarização nas duas superfícies do dielétrico, $\boldsymbol{\sigma'(R_1)}$, $\boldsymbol{\sigma'(R_2)}$ e a densidade de carga de polarização em volume $\boldsymbol{\rho'}$.

d) [2,0] Determine a energia eletrostática do condensador.

e) [2,0] Insere-se no condensador um dielétrico com permitividade $\boldsymbol{\epsilon' < \epsilon}$, "empurrando" o dielétrico existente. Diga, justificando, se esse novo dielétrico tende a ser puxado para dentro ou a ser expulso do condensador.

1-a) Para determinar os campos vamos usar a Lei de Gauss para superfícies cilíndricas $\mathcal{S}_r$ de raio r e altura $h \ll L$, com eixos coincidentes com o do condensador, e em regiões afastadas das extremidades do condensador (ou seja, onde para todos os efeitos o condensador pode ser considerado infinitamente comprido).

Para as regiões onde $r < R_1$ ou $r > R_2$ nas condições descritas e pela simetria cilíndrica do problema, $\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r,z)\,\vec{e}_r(\theta)$ (em coordenadas cilíndricas $\{r, \theta, z\}$ num referencial com o eixo $\vec{e}_z$ também coincidente com o do condensador) pelo que os fluxos nas superfícies de Gauss $\mathcal{S}_r$

são

$$\iint_{S_r} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = E_r(r)\, 2\pi r\, h = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_o}$$

Uma vez que dentro da armadura interior não existem cargas, $Q_{\text{int}}(r < R_1) = 0$, donde $E_r(r) = 0$ e

$$\vec{E} = E_r(r)\,\vec{e}_r(\theta) = \vec{0}; \qquad \vec{D} = \mu_o \vec{E} = \vec{0}; \qquad (\text{para } r < R_1)$$

Para superfícies de Gauss com $r > R_2$ também se tem $Q_{\text{int}}(r > R_2) = 0$, mas agora porque toda a carga λh da armadura interior dentro da superfície de Gauss é compensada por uma carga $-\lambda h$ na armadura exterior (devido ao facto que todas as linhas de campo que começam na armadura interior acabarem na armadura exterior dentro da mesma superfície de Gauss). Assim também se tem $E_r(r) = 0$ e

$$\vec{E} = E_r(r)\,\vec{e}_r(\theta) = \vec{0}; \qquad \vec{D} = \mu_o \vec{E} = \vec{0}; \qquad (\text{para } r > R_2)$$

Para uma superfície de Gauss de altura h dentro do dielétrico, com $R_1 < r < R_2$, e dado que pela simetria cilíndrica $\vec{D}(\vec{r}) = D_r(r)\,\vec{e}_r(\theta)$ enquanto $d\vec{S} = dS\,\vec{e}_r(\theta)$ na superfície lateral (a única onde existe fluxo)

$$\iint_{S_r} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{int}}^{\text{livre}} \quad \therefore \quad D_r(r)\, 2\pi r\, h = \lambda h \quad \Rightarrow \vec{D}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi r}\,\vec{e}_r(\theta) \qquad \left[\frac{C}{m^2}\right]$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{D}(\vec{r})}{\varepsilon} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}\,\vec{e}_r(\theta) \qquad \left[\frac{V}{m}\right]$$

1-b) Para determinar a relação entre carga e diferença de potencial é necessário relacionar $\vec{E}$ com o potencial.

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}\,\vec{e}_r(\theta) \qquad \therefore \qquad \varphi(r) = \varphi_o - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\log(r) \qquad [V]$$

$$V = \varphi(R_1) - \varphi(R_2) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \qquad \therefore \qquad \lambda = \frac{2\pi\varepsilon V}{\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \qquad \left[\frac{C}{m}\right]$$

1-c) Para uma permitividade $\varepsilon = \varepsilon_o(1 + \chi_e)$ deduz-se que $\varepsilon_o\chi_e = \varepsilon - \varepsilon_o$ donde

$$\vec{P}(\vec{r}) = \varepsilon_o \chi_e \vec{E}(\vec{r}) = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_o)\,\lambda}{2\pi\varepsilon r}\,\vec{e}_r(\theta) \qquad \left[\frac{C}{m^2}\right]$$

Sabendo que $\sigma_{\text{pol}} = \vec{P} \cdot \vec{n}$ e que $\rho_{\text{pol}} = -\nabla \cdot \vec{P}$ obtém-se, na superfície interior do dielétrico onde $\vec{n} = -\vec{e}_r(\theta)$ e $r = R_1 = \vec{r}_1 \cdot \vec{e}_r(\theta)$,

$$\sigma_{\text{pol}}(\vec{r}_1) = \vec{P}(\vec{r}_1) \cdot (-\vec{e}_r(\theta)) = -\frac{(\varepsilon - \varepsilon_o)}{2\pi\varepsilon R_1}\frac{2\pi\varepsilon V}{\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \equiv -\frac{V(\varepsilon - \varepsilon_o)}{R_1\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \qquad \left[\frac{C}{m^2}\right]$$

Na superfície exterior do dielétrico onde $\vec{n} = \vec{e}_r(\theta)$ e $r = R_2 = \vec{r}_2 \cdot \vec{e}_r(\theta)$,

$$\sigma_{\text{pol}}(\vec{r}_2) = \vec{P}(\vec{r}_2) \cdot (\vec{e}_r(\theta)) = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_o)}{2\pi\varepsilon R_2}\frac{2\pi\varepsilon V}{\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \equiv \frac{V(\varepsilon - \varepsilon_o)}{R_2\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \qquad \left[\frac{C}{m^2}\right]$$

Dentro do dielétrico não existem cargas livres, pelo que aí $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{\text{livre}} \equiv 0$

$$\rho_{\text{pol}}(\vec{r}) = -\nabla \cdot \vec{P} = -\nabla \cdot \left(\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon}\chi_e \vec{D}\right) = -\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon}\chi_e\,\rho_{\text{livre}}(r) \equiv 0 \qquad \left[\frac{C}{m^3}\right]$$

1-d) A energia armazenada no condensador é, usando a idéia de que para o carregar é necessário dispender energia $U_{\text{cond}} = \int_0^Q V(q)\,dq = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\,Q\,V$,

$$U_{\text{cond}} = \frac{1}{2}\,Q\,V = \frac{1}{2}\,L\,\lambda\,V = \frac{\pi\,\varepsilon\,L\,V^2}{\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \qquad [J]$$

Em alternativa, poder-se-ia considerar que a densidade de energia no campo eléctrico dentro do condensador é $w_e(\vec{r}) = \frac{1}{2}\,\varepsilon\left|\vec{E}(\vec{r})\right|^2$ e integrar esta densidade no volume Ω entre as armaduras. Usando coordenadas cilíndricas com $\vec{e}_z$ alinhado com o eixo do conjunto, e relembrando que $dV = r\,dr\,d\theta\,dz$ nestas coordenadas, obtém-se também

$$U_{\text{cond}} = \int_\Omega w_e(\vec{r})\,dV =$$

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\,\varepsilon\,E_r^2(r)\,r\,dr\,d\theta\,dz = \int_{R_1}^{R_2} L\,\pi\,\varepsilon\left(\frac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon\,r}\right)^2 r\,dr = \frac{L\,\lambda^2}{4\,\pi\,\varepsilon}\,\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{\pi\,\varepsilon\,L\,V^2}{\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

1-e) Considerando o sistema **Dielétrico+Condensador+Bateria** como isolado, a sua energia total E_{tot} deve ser constante. Assim, qualquer trabalho mecânico $dW_{\text{mec}} = \vec{F}\cdot d\vec{r}$ realizado sobre os dielétricos deve verificar

$$dE_{\text{tot}} \equiv dW_{\text{mec}} + dU_{\text{cond}} + dU_{\text{bat}} = 0$$

Como o condensador está ligado à fonte de tensão constante V, a sua energia varia de $dU_{\text{cond}} = \frac{1}{2}\,V\,dQ$ quando recebe uma carga dQ (o que acontece porque a capacidade C se altera).

A capacidade do condensador cilíndrico de comprimento L cheio com dielétrico de permitividade ε é

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\lambda\,L}{V} = \frac{2\,\pi\,\varepsilon\,L}{\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \qquad [F]$$

Quando temos dois dielétricos dentro do condensador, com comprimentos x (para permitividade ε) e $x' = L - x$ (para a permitividade ε'), então a capacidade total é a de dois condensadores cilíndricos em paralelo:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{2\,\pi\,\varepsilon\,x}{\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} + \frac{2\,\pi\,\varepsilon'\,(L-x)}{\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = \frac{2\,\pi\,(x\,(\varepsilon-\varepsilon') + L\,\varepsilon')}{\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \qquad [F]$$

Uma variação dC da capacidade implica uma variação da carga nas armaduras do condensador quando estas são mantidas a potenciais constantes. Quando essa variação resulta de um aumento dx da componente de dielétrico ε então

$$dQ = V\,dC = V\,\frac{dC}{dx}\,dx = \frac{2\,\pi\,(\varepsilon-\varepsilon')\,V}{\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}\,dx \qquad [C]$$

A carga dQ vem da bateria, que assim perde energia $dU_{\text{bat}} = -V\,dQ$. Da conservação de energia total E_{tot} do sistema resulta que

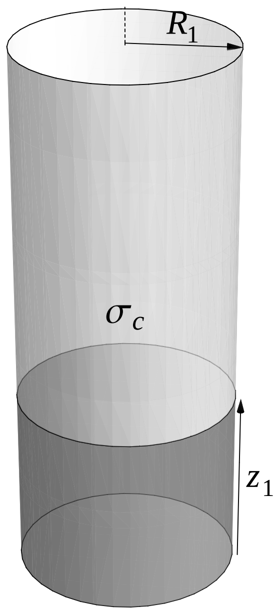
$$dW_{\text{mec}} + \frac{1}{2}\,V\,dQ - V\,dQ = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad dW_{\text{mec}} = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}\,V\,dQ = \frac{\pi\,(\varepsilon-\varepsilon')\,V^2}{\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}\,dx \quad [J]$$

$$\vec{F} = \frac{\pi(\varepsilon - \varepsilon')\, V^2}{\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \vec{e}_x \qquad [N]$$

Quando $\varepsilon > \varepsilon'$ a componente $F_x = \frac{\pi(\varepsilon-\varepsilon')\, V^2}{\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} > 0$, fazendo assim aumentar x e atraindo para dentro do condensador o dielétrico original de permitividade ε. Ou seja, se $\varepsilon > \varepsilon'$ a força atractiva sobre o dielétrico original é mais forte que a força atractiva que o condensador exerce sobre o novo dielétrico de permitividade ε', resultando em que este seja empurrado para fora do condensador.

Problema 2

2. Num circuito eléctrico utiliza-se um cabo cilíndrico de cobre, rectilíneo de raio $\boldsymbol{R_1}$, cuja condutividade eléctrica é $\boldsymbol{\sigma_c}$, a permitividade eléctrica $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ e a susceptibilidade magnética $\boldsymbol{\chi_m = -a}$ (o cobre é um material diamagnético). Sabendo que o campo eléctrico no interior do cabo é $\vec{E}_0 = E_0\vec{e}_z$, determine:



a) [1,5] A corrente eléctrica, $\boldsymbol{I}$, existente no cabo.

b) [2,0] A resistência eléctrica do cabo por unidade de comprimento.

c) [1,5] A potência dissipada no cabo por unidade de comprimento.

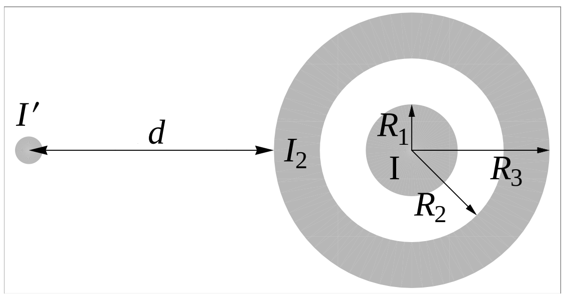
d) [2,0] O campo magnético $\vec{B}$, existente na região interior do cabo ($r < R_1$) e exterior ao cabo ($r > R_1$).
Nota: admita que o cabo cilíndrico possui um comprimento muito maior que o seu diâmetro.

e) [1,0] Admita que o cabo numa dada região $z < z_1$ se torna supercondutor (condutividade eléctrica "infinita"). Qual o campo eléctrico na região supercondutora e qual a carga eléctrica existente na fronteira $z = z_1$?

Admita que envolve o cabo cilíndrico rectilíneo de raio $\boldsymbol{R_1}$ por um outro cabo condutor de raios interno e externo respectivamente, $\boldsymbol{R_2 = 2R_1}$ e $\boldsymbol{R_3 = 3R_1}$, alinhando os seus eixos. Considere que os cabos são muito compridos quando comparados com o seu diâmetro e que se encontram isolados.

f) [0,5] Determine a corrente eléctrica $\boldsymbol{I_2}$ (magnitude e sentido) que tem de circular no condutor cilíndrico exterior de forma a anular o campo magnético na região $\boldsymbol{r > 3R_1}$.

g) [1,0] Determine a força por unidade de comprimento existente entre um filamento condutor (diâmetro $\ll \boldsymbol{d}$) colocado de forma paralela aos cabos percorrido por uma corrente eléctrica $\boldsymbol{I'}$, a uma distância $\boldsymbol{d}$, e o cabo cilíndrico exterior.



2-a) Dada a conductividade σ_c a Lei de Ohm afirma que $\vec{J} = \sigma_c \vec{E}$, donde, para qualquer secção do cabo

$$I = \iint_S \vec{\boldsymbol{J}} \cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = \sigma_c E_o \iint_S \vec{\boldsymbol{e}}_z \cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = \sigma_c E_o \pi R_1^2 \qquad [A]$$

2-b) Para o campo constante $\vec{\boldsymbol{E}} = E_o \vec{\boldsymbol{e}}_z$ é preciso existir um potencial φ tal que $\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi$, ou seja

$$\varphi(z) = \varphi_o - E_o z \qquad [V] \qquad \therefore \qquad E_o = \frac{\varphi_o - \varphi(z)}{z} = \frac{I}{\pi R_1^2 \sigma_c} \qquad \left[\frac{V}{m}\right]$$

Assim a queda de potencial para um comprimento ℓ do cabo é

$$V(\ell) = \frac{\ell}{\pi R_1^2 \sigma_c} I = \mathcal{R}(\ell)\, I \qquad \therefore \qquad R = \frac{\mathcal{R}(\ell)}{\ell} = \frac{1}{\pi R_1^2 \sigma_c} \qquad \left[\frac{\text{Ohm}}{m}\right]$$

2-c) A potência dissipada por unidade de comprimento será pela lei de Joule

$$\mathcal{P} = R I^2 = \frac{1}{\pi R_1^2 \sigma_c} \left(\sigma_c E_o \pi R_1^2\right)^2 = \sigma_c \pi R_1^2 E_o^2 \qquad \left[\frac{\text{Watt}}{m}\right]$$

2-d) Para o cálculo do campo magnético usa-se a Lei de Ampère com a intensidade do campo magnético $\vec{\boldsymbol{H}} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{B}}}{\mu}$ para um círculo Γ de raio r centrado no eixo do cabo e num plano perpendicular a este

$$\oint_\Gamma \vec{\boldsymbol{H}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = (I_{\text{cond}})_\Gamma \qquad \text{onde} \qquad (I_{\text{cond}})_\Gamma = \begin{cases} I & \text{se } r > R_1 \\ \dfrac{I}{R_1^2} r^2 & \text{se } r < R_1 \end{cases} \qquad [A]$$

Dadas as simetrias cilíndricas, o campo será tangente aos círculos concêntricos com o eixo, e terá magnitude apenas dependente da distância ao eixo do cabo, pelo que a circulação de $\vec{\boldsymbol{H}} = H_\theta(r)\, \vec{\boldsymbol{e}}_\theta(\theta)$ ao longo de um destes círculos Γ de raio r é, usando coordenadas cilíndricas,

$$\oint_\Gamma \vec{\boldsymbol{H}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = H_\theta(r)\, 2\pi r \qquad \therefore \qquad H_\theta(r) = \begin{cases} \dfrac{I}{2\pi r} & \text{se } r > R_1 \\ \dfrac{I}{2\pi R_1^2} r & \text{se } r < R_1 \end{cases} \qquad \left[\frac{A}{m}\right]$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = B_\theta(r)\, \vec{\boldsymbol{e}}_\theta(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{\boldsymbol{e}}_\theta(\theta) & \text{se } r > R_1 \\ \dfrac{\mu_0 (1-a) I r}{2\pi R_1^2} \vec{\boldsymbol{e}}_\theta(\theta) & \text{se } r < R_1 \end{cases} \qquad [T]$$

2-e) Na região supercondutora $z < z_1$ a resistividade é nula $\rho_c = 0$, o significa uma condutibilidade $\sigma_c = \infty$. Teóricamente o campo pode ser $\vec{\boldsymbol{E}} = 0$ e ainda assim $\vec{\boldsymbol{J}} \neq 0$, pelo que na transição para a região $z > z_1$ vai existir uma descontinuidade no campo eléctrico, só possível com a existência de uma distribuição superficial de carga $\sigma(z_1)$ na secção de transição. Assim, pela lei de Gauss aplicada a uma caixa com bases de área ΔS em cada lado da superfície $z = z_1$ (dentro do condutor) e paredes paralelas a $\vec{\boldsymbol{E}}_o$, obtemos

$$\oiint_S \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = \vec{\boldsymbol{E}}_o \cdot \Delta S\, \vec{\boldsymbol{e}}_z = \frac{\sigma(z_1)\, \Delta S}{\varepsilon_o} \qquad \therefore \qquad \sigma(z_1) = \varepsilon_o E_o = \frac{\varepsilon_o I}{\pi R_1^2 \sigma_c} \qquad \left[\frac{C}{m^2}\right]$$

2-f) Usando mais uma vez a Lei de Ampère , a corrente I_2 deve ser tal que para um circuito Γ envolvendo os dois cabos na região exterior onde $\vec{\boldsymbol{B}} \equiv 0$

$$\oint_{\Gamma} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = 0 = \mu_o (I_2 + I) \qquad \therefore \qquad I_2 = -I \qquad [A]$$

2-g) A força realizada sobre um segmento $d\vec{\boldsymbol{l}} = dz\, \vec{\boldsymbol{e}}_z$ do filamento com corrente I' à distância d do condutor exterior é

$$d\vec{\boldsymbol{F}} = I'\, d\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = I'\, dz\, \vec{\boldsymbol{e}}_z \times \left(\frac{\mu_o I_2}{2\pi (d + 3R_1)} \vec{\boldsymbol{e}}_\theta (\pi) \right) = -\frac{\mu_o I_2 I'\, dz}{2\pi (d + 3R_1)} \vec{\boldsymbol{e}}_r (\pi) \qquad [N]$$

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{F}}}{dz} = -\frac{\mu_o I_2 I'}{2\pi (d + 3R_1)} \vec{\boldsymbol{e}}_r (\pi) \qquad \left[\frac{N}{m}\right]$$

A força por unidade de comprimento que o filamento exerce sobre o cabo exterior é simétrica desta.