

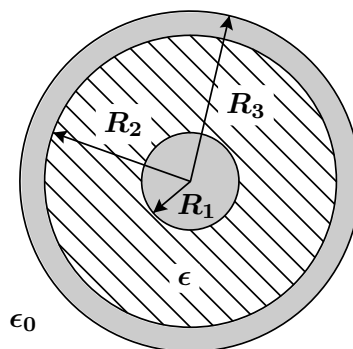


2º Teste / 1º Exame: Correção

- Durante a realização do teste/exame não é permitido o uso de telemóveis e calculadoras.
- Identifique claramente todas as folhas do teste/exame.
- Resolva os grupos em páginas separadas.
- Realize sempre em primeiro lugar os cálculos analíticos e só no final substitua pelos valores numéricos.

| | Duração | Problemas |
|-----------------|---------|------------|
| 2ª Teste | 1h30 | 3, 4 |
| 1º Exame | 2H30 | 1, 2, 3, 4 |

1. Considere dois **condutores esféricos**, concêntricos, com a geometria indicada na figura e colocados no vazio. O condutor interior tem uma carga eléctrica total $q_1 > 0$ enquanto que o condutor exterior tem uma carga eléctrica total $q_2 = 0$. O espaço entre os condutores está preenchido com um dieléctrico linear, homogéneo e isótropo de permitividade ϵ . Determine:



a) [1,0] o vector \vec{D} no espaço entre os condutores.

Resolução:

Fazendo passar uma superfície esférica S de raio r , pelo ponto onde se pretende calcular o o vector \vec{D} , pode-se calcular o fluxo deste através da superfície como sendo:

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = Q_{liv}^{int} \Rightarrow D 4\pi r^2 = q_1$$

$$\vec{D} = \frac{q_1}{4\pi} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$$

b) [1,0] o campo eléctrico no exterior do sistema de condutores esféricos ($r > R_3$).

Resolução:

Dado que o condutor exterior se encontra electricamente neutro (carga nula) e que existe uma carga $+q_1$ no condutor interior, no equilíbrio existe uma carga $-q_1$ na superfície interna (R_2) do condutor exterior e uma carga $+q_1$ na superfície externa (R_3) do condutor exterior. Fazendo passar uma superfície esférica S por um ponto a uma distância $r > R_3$ e aplicando a lei de Gauss generalizada, obtém-se o fluxo do campo \vec{D} como sendo (note-se que no interior desta superfície se tem cargas livres e de polarização):

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = Q_{liv}^{int} \Rightarrow D 4\pi r^2 = q_1 - q_1 + q_1 \Rightarrow \vec{D} = \frac{q_1}{4\pi} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$$

Vem portanto para o campo \vec{E} : $\vec{E} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$

c) [1,0] o potencial electrostático do condutor interior, considerando como referência $\phi(\infty) = 0$.

Resolução:

$$\Phi_{R_1} = \int_{R_1}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_1 \cdot d\vec{\ell} + \int_{R_3}^{\infty} \vec{E}_2 \cdot d\vec{\ell}$$

onde \vec{E}_1 e \vec{E}_2 são respectivamente os campos eléctricos na região entre os condutores ($R_1 < r < R_2$) e na região exterior ($r > R_3$).

$$\Phi_{R_1} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q_1}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2} dr + \int_{R_3}^{\infty} \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = \frac{q_1}{4\pi} \left[\frac{1}{\epsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{R_3} \right]$$

d) [1,0] a energia electrostática armazenada na região entre os dois condutores.

Resolução:

A densidade de energia electrostática na região de energia entre os dois condutores:

$$u_E = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \epsilon E_1^2 = \frac{1}{32\epsilon} \left(\frac{q_1}{\pi r^2} \right)^2$$

A energia obtém-se integrando a expressão anterior em todo o volume da região:

$$U_E = \int_V u_E dV = \frac{q_1^2}{32\pi^2\epsilon} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{q_1^2}{8\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

e) [1,0] a densidade de carga livre, σ_2 , na superfície interior do condutor exterior e a densidade de carga de polarização, σ'_2 , na superfície exterior do dieléctrico ($r = R_2$). Relacione estas duas densidades de carga eléctrica com a discontinuidade da componente normal do vector \vec{E} em $r = R_2$; isto é, mostre que se tem

$$E_n(R_2^+) - E_n(R_2^-) = \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma_2 + \sigma'_2)$$

Resolução:

Por aplicação da Lei de Gauss a carga total na superfície de raio R_2 do condutor exterior é $Q_2 = -q_1$ e portanto a densidade de carga superficial em R_2 vem: $\sigma_2 = \frac{Q_2}{4\pi R_2^2} = -\frac{q_1}{4\pi R_2^2}$

A densidade de carga de polarização na superfície de raio R_2 do dieléctrico é dada por:

$$\sigma'_2 = \vec{P} \cdot \vec{n}_{\text{ext}} = \vec{P} \cdot \vec{e}_r$$

com

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \frac{q_1}{4\pi r^2}$$

Assim vem:

$$\sigma'_2 = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \right) \frac{q_1}{4\pi R_2^2}$$

Então:

$$\frac{1}{\epsilon_0} (\sigma_2 + \sigma'_2) = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} + \left(\frac{1}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon} \right) \frac{q_1}{4\pi R_2^2} = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon R_2^2}$$

Por outro lado:

$$E_n(R_2^+) = 0 \text{ e } E_n(R_2^-) = \frac{1}{\epsilon} \frac{q_1}{4\pi R_2^2}, \text{ logo}$$

$$E_n(R_2^+) - E_n(R_2^-) = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon R_2^2} = \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma_2 + \sigma'_2)$$

2. Um fio rectilíneo colocado no espaço vazio, transporta uma corrente eléctrica estacionária $I_1 = I_0$. A envolver o fio e concêntrico com este, existe um anel de ferro de raio a , permeabilidade magnética μ e diâmetro b , em torno do qual existe um enrolamento com N espiras e coeficiente de auto-indução L Henry, que se encontra ligado a uma resistência eléctrica R . Determine:

a) [1,0] o campo magnético \vec{B} a uma distância r ($a < r < a + b$) no interior do anel.

Resolução:

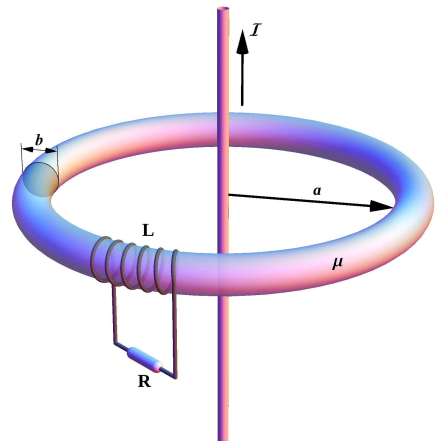
A lei de Ampère generalizada permite-nos calcular o vector

\vec{H} :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_0 \Rightarrow H 2\pi r = I_0 \Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{2\pi} \frac{I_0}{r} \vec{e}_\theta$$

O Campo magnético vem:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{I_0}{r}$$



- b) [1,0] o coeficiente de indução mútua M do sistema anel/enrolamento-fio, admitindo que $a \gg b$.
Nota: admitindo que $a \gg b$ significa que em boa aproximação se pode considerar o campo \vec{B} constante no interior do anel de ferro.

Resolução:

$$\Phi_L = MI_1 = NB\pi \left(\frac{b}{2}\right)^2 = N\frac{\mu}{2\pi} \frac{I_0}{a} \pi \left(\frac{b}{2}\right)^2 = N\frac{\mu}{8} \frac{b^2}{a}$$

- c) [0,5] a corrente eléctrica, I_2 , que percorre o circuito RL .

Resolução:

Como a corrente I_1 é estacionária, não há variação do campo \vec{B} no enrolamento e portanto pela lei da indução ($\epsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$) não há força electromotriz induzida. Daí que: $I_2 = 0$.

- d) [1,0] a energia magnética armazenada pelo anel toroidal, admitindo que $a \gg b$.

Resolução:

A densidade de energia na região do toro ferromagnético:

$$u_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\mu I_0}{2\pi a}\right)^2 = \frac{\mu}{8\pi^2} \frac{I_0^2}{a^2}$$

A energia magnética obtém-se integrando no volume do toro:

$$U_m = \int u_m dV = \frac{\mu}{8\pi^2} \frac{I_0^2}{a^2} 2\pi a \pi \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{\mu}{16} \frac{b^2}{a} I_0^2$$

- e) [0,5] a corrente de magnetização existente à superfície do anel de ferro.

Resolução:

O vector magnetização no interior do toro:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right) \vec{H} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right) \frac{I_0}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

A corrente de magnetização à superfície do toro (corrente por unidade de comprimento) é circular possuido em cada ponto a direcção do vector unitário tangencial ao toro \vec{e}_t :

$$\vec{J}_m = \vec{M} \times \vec{n} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right) \frac{I_0}{2\pi r} \vec{e}_t$$

onde o vector \vec{n} é o vector normal ao toro em cada ponto e apontando para o exterior do toro.

Admita agora que a corrente que atravessa o fio varia no tempo de acordo com a expressão $I_1 = I_0 e^{-kt}$.

- f) [1,0] Determine a equação diferencial que rege a corrente eléctrica I_2 , existente no circuito RL .

Resolução:

Aplicando a lei das malhas ao circuito RL:

$$-V_L + V_R = 0$$

Por outro lado, a força electromotriz induzida na indutância L é dada por:

$$V_L = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} (LI_2 + MI_1)$$

Vem então para a equação diferencial que rege a corrente I_2 do circuito:

$$L \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} + RI_2 = 0 \Rightarrow L \frac{dI_2}{dt} + RI_2 = I_0 \kappa e^{-\kappa t}$$

3. Pretende-se construir um pequeno gerador eléctrico que converte energia mecânica em energia eléctrica. Para tal, constrói-se um circuito eléctrico constituído por um condutor em \mathbf{U} , de resistividade desprezável, e fechado por uma haste condutora de forma cilíndrica, com uma secção de raio a e comprimento total $2d$. O circuito tem inicialmente a forma de um quadrado de lado d , e está sujeito a um campo magnético \vec{B} perpendicular ao plano do circuito.

- a) [1,0] Determine a resistência eléctrica circuito inicial correspondente à haste cilíndrica de comprimento d , sabendo que a condutividade eléctrica do material da haste é σ_c .

Resolução:

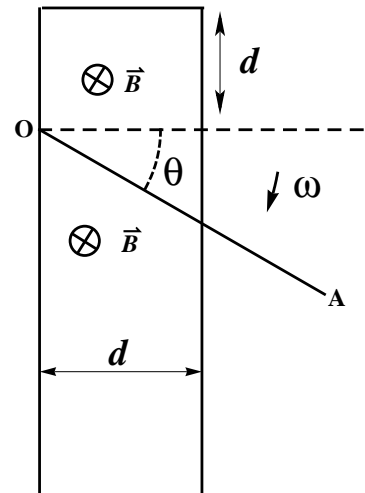
A resistividade $\rho_c = \frac{1}{\sigma_c} (\Omega m)$ representa a resistência de um cubo unitário do material condutor. Para determinar a resistência de um condutor homogêneo deste material devemos considerá-lo constituído por cubos destes em paralelo para encher uma secção recta πa^2 , e suficientes em série para perfazer o seu comprimento d . Um número $n_1 = \frac{d}{\pi a^2}$ de resistências ρ em paralelo formam uma resistência equivalente por unidade de comprimento $R_1^{-1} = n_1 \rho^{-1} \implies R_1 = \frac{\rho}{\pi a^2} (\Omega m^{-1})$ de secção $\pi a^2 (m^2)$, e $n_2 = d$ destas resistências em série formam uma resistência $R = n_2 R_1 = \frac{d \rho}{\pi a^2} (\Omega)$ de comprimento $d(m)$. Alternativamente poderíamos considerar que se se estabelecesse um campo eléctrico \vec{E} homogêneo entre as extremidades da haste, então uma tensão $V_{AO} = \int_{OA} \vec{E} \cdot d\vec{l} = |\vec{E}| d$ deveria existir entre O e A , conjuntamente com uma corrente homogênea

$$I = \frac{V_{AO}}{R} = \int \int \sigma_c \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sigma_c |\vec{E}| \pi a^2$$

Daqui se conclui que

$$R = \frac{V_{AO}}{I} = \frac{d}{\sigma_c \pi a^2} = \frac{\rho_c d}{\pi a^2}$$

- b) Admita agora que a haste é colocada em rotação em torno do ponto O com velocidade angular constante ω . Determine, considerando a situação em que o circuito se encontra fechado:



- b.1) [1,0] o fluxo do campo magnético que atravessa o circuito eléctrico, $\Phi_B(t)$.

Resolução:

Enquanto se encontra em movimento e em contacto com o circuito, o comprimento da haste até ao ponto de contacto é: $l(t) = \frac{d}{\cos(\omega t)}$

Assim, a área $A(t)$ do circuito em função de t é a área inicial mais a área do triângulo de altura d e base $l(t) \sin(\omega t)$, ou seja:

$$A(t) = d^2 + \frac{1}{2} d l(t) \sin(\omega t) = d^2 (1 + \frac{1}{2} \tan(\omega t))$$

- b.2) [0,5] a resistência eléctrica do circuito, $R(t)$.

Resolução:

Quando a haste tem comprimento $l(t)$ a sua resistência é $R(t) = \frac{\rho l(t)}{\pi a^2} = \frac{d \rho}{\pi a^2 \cos(\omega t)}$

- b.3) [1,0] a corrente eléctrica induzida no circuito $I(t)$ e o seu sentido de circulação.

Resolução:

A variação da área do circuito induz uma força electromotriz $\varepsilon_{fem} = -\frac{d\Phi}{dt}$ onde o fluxo $\Phi(t)$ variável é, orientando a área $A(t)$ com a normal no sentido de \vec{B} ,

$$\Phi(t) = \vec{B} \cdot \vec{A}(t) = Bd^2 \left(1 + \frac{1}{2} \tan(\omega t)\right)$$

$$\varepsilon_{fem}(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\frac{\vec{B} \cdot d\vec{A}(t)}{dt} = -\frac{\omega Bd^2}{2 \cos^2(\omega t)}$$

A intensidade de corrente eléctrica é então no sentido anti-horário

$$I(t) = -\frac{\varepsilon_{fem}(t)}{R(t)} = -\frac{\pi a^2 B d \omega}{2 \rho \cos(\omega t)}$$

b.4) [0,5] a força magnética total existente sobre a haste em rotação, $\vec{F}_B(t)$.

Resolução:

A força magnética $d\vec{F}_m$ sobre um segmento $d\vec{r}$ da haste no instante t em que esta é percorrida por uma corrente $I(t)$ é, tendo em conta que no instante t :

$$d\vec{r}(t) = dr \vec{e}_r(\omega t) \quad ; \quad \vec{B} = -B \vec{e}_z$$

$$d\vec{F}_m(\vec{r}, t) = I(t) d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r}) = I(t) dr B \vec{e}_\theta(\omega t) = \frac{\pi a^2 B^2 d \omega}{2 \rho \cos(\omega t)} dr \vec{e}_\theta(\omega t)$$

$$\vec{F}_m(t) = \int_{haste} d\vec{F}[\vec{r}, t] = \int_0^{\ell(t)} I(t) dr B \vec{e}_\theta(\omega t) = I(t) \ell(t) B \vec{e}_\theta(\omega t)$$

Substituindo aqui os valores de $I(t)$ e $\ell(t)$ determinados anteriormente obtém-se a expressão:

$$\vec{F}_m(t) = \frac{\pi a^2 B^2 d^2 \omega}{2 \rho \cos^2(\omega t)} \vec{e}_\theta(\omega t)$$

b.5) [1,0] a força mecânica que seria necessária aplicar na extremidade da barra \mathbf{A} , de forma a manter a velocidade angular ω constante.

Resolução:

Uma velocidade angular constante significa que o momento angular $\vec{L}_o = \mathcal{I} \vec{\omega}$ da haste em relação a O se mantém constante, pelo que o momento total (binário) das forças aplicadas (magnética + mecânica) na haste deve ser nulo.

$$\vec{N}_o = \frac{d\vec{L}_o}{dt} = \mathbf{0}$$

Como a força magnética está distribuída sobre a haste, o seu momento em relação a O deve ser calculado integrando os momentos de cada segmento, enquanto o da força mecânica $\vec{F}_A(t)$ aplicada em \mathbf{A} é apenas: $2 d \vec{e}_r(\omega t) \times (-F_A(t) \vec{e}_\theta(\omega t))$

$$\begin{aligned} \vec{N}_o &= 2 d \vec{e}_r(\omega t) \times \vec{F}_A(t) + \int_{haste} \vec{r} \times d\vec{F}_m(\vec{r}, t) = \\ &= -2 d F_A(t) \vec{e}_z + \int_0^{\ell(t)} r \vec{e}_r(\omega t) \times I(t) dr B \vec{e}_\theta(\omega t) = \\ &= -2 d F_A(t) \vec{e}_z + \int_0^{\ell(t)} r dr I(t) B \vec{e}_z = \\ &= -2 d F_A(t) \vec{e}_z + \frac{1}{2} I(t) \ell(t)^2 B \vec{e}_z = \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\vec{F}_A(t) = -\frac{1}{4d} I(t) \ell(t)^2 B \vec{e}_\theta(\omega t) = -\frac{\ell(t)}{4d} \vec{F}_m(t)$$

4. Considere uma onda electromagnética plana monocromática a propagar-se no vazio. O campo eléctrico \vec{E} da onda é dado por:

$$\begin{cases} E_x = E_0 \sin \left[\omega t - |\vec{k}| \left(\frac{1}{2} x - \frac{\sqrt{3}}{2} y \right) \right] \\ E_y = \alpha E_0 \sin \left[\omega t - |\vec{k}| \left(\frac{1}{2} x - \frac{\sqrt{3}}{2} y \right) \right] \\ E_z = 0 \end{cases}$$

Determine:

a) [1,0] a direcção de propagação da onda.

Resolução:

Qualquer ponto cuja posição é dada por \vec{r} pertencente a um mesmo plano perpendicular à direcção de propagação da onda ($\vec{\kappa}$), possui a mesma fase: $\varphi_r = \vec{\kappa} \cdot \vec{r}$

Dado o termo de fase do campo eléctrico ser:

$$\vec{\kappa} \cdot \vec{r} = |\vec{\kappa}| \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \right) = |\vec{\kappa}| \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right) \cdot (x, y, z)$$

tem-se para o versor da direcção da onda: $\vec{n} \equiv \frac{\vec{\kappa}}{|\vec{\kappa}|} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right)$

b) [1,0] o valor da constante α para que se trate duma onda plana monocromática.

Resolução:

Na onda plana o campo eléctrico é perpendicular à direcção de propagação: $\vec{E} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{n} = 0$

$$\text{Tem-se então: } (\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y, 0) \cdot \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right) = \frac{E_x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} E_y = 0 \Rightarrow \frac{E_y}{E_x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

c) [0,5] a polarização da onda.

Resolução:

A onda possui polarização linear pois as componentes \mathbf{E}_x e \mathbf{E}_y oscilam em fase.

d) [0,5] o campo \vec{H} da onda.

Resolução:

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{n} \times \vec{E} \Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\mu_0 c} \vec{n} \times \vec{E} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (\vec{n} \times \vec{E})$$

$$\vec{n} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{E_y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} E_x \right) \vec{e}_z = \frac{2}{3} \sqrt{3} E_0 \sin(\omega t - \vec{\kappa} \cdot \vec{r}) \vec{e}_z$$

$$\text{Donde: } \vec{H} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{2}{3} \sqrt{3} E_0 \sin(\omega t - \vec{\kappa} \cdot \vec{r}) \vec{e}_z$$

e) [1,0] o valor médio do vector de Poynting, $\langle |\vec{S}| \rangle$. Realize o cálculo numérico no final, tendo em conta que $E_0 = 3\sqrt{2\pi} \text{ V/m}$.

Resolução:

$$\begin{aligned} |\vec{S}| &= |\vec{E} \times \vec{H}| = c u_{e.m.} = c \epsilon_0 E^2 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2 \Rightarrow \langle |\vec{S}| \rangle = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \langle E^2 \rangle \\ E^2 &= E_x^2 + E_y^2 = E_0^2 (1 + \alpha^2) \sin^2(\omega t - \vec{\kappa} \cdot \vec{r}) = \frac{4}{3} E_0^2 \sin^2(\omega t - \vec{\kappa} \cdot \vec{r}) \\ \langle E^2 \rangle &= \frac{2}{3} E_0^2, \text{ uma vez que } \langle \sin^2(\omega t) \rangle = 1/2. \end{aligned}$$

Donde:

$$\langle |\vec{S}| \rangle = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{2}{3} E_0^2 = \frac{1}{\sqrt{4\pi \cdot 910^9}} \frac{1}{\sqrt{4\pi \cdot 10^{-7}}} \frac{2}{3} 9\sqrt{2\pi} = 0.1 \text{ W/m}^2$$

f) [1,0] Considere agora que a onda incide na superfície de separação **vazio**($y > 0$)—**vidro**($y < 0$), definida pelo plano $y = 0$. Escreva o **vector de onda**, $\vec{\kappa}_t$, para a onda transmitida ($n_{\text{vidro}} = 1.5$).

Resolução:

O ângulo de incidência da onda (com a normal ao plano de separação, \vec{e}_y):

$$\vec{n} \cdot (-\vec{e}_y) = \cos\theta_i$$

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right) \cdot (0, -1, 0) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\theta_i \Rightarrow \sin\theta_i = \sqrt{1 - \cos^2\theta_i} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$$

O ângulo que a onda transmitida faz com a normal \vec{e}_y :

$$n_{ar} \sin\theta_i = n_{\text{vidro}} \sin\theta_t$$

$$\sin\theta_t = \frac{n_{ar}}{n_{\text{vidro}}} \sin\theta_i = \frac{2}{3} \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos\theta_t = \sqrt{1 - \sin^2\theta_t} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2}{3} \sqrt{2}$$

O vector de ondas da onda transmitida:

$$\vec{\kappa}_t = |\vec{\kappa}| n_{\text{vidro}} \vec{n}_t = |\vec{\kappa}| n_{\text{vidro}} (\sin\theta_t, -\cos\theta_t, 0) = |\vec{\kappa}| \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \sqrt{2}, 0 \right) = |\vec{\kappa}| \left(\frac{1}{2}, -\sqrt{2}, 0 \right)$$

Electrostática

- $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$
- $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ N.m}^2.\text{C}^{-2}$
- $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$
 $\nabla \times \vec{E} = 0$
- $\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = \int_V \rho_{liv} dv$
 $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{liv}$
- $\oint_S \vec{P} \cdot \vec{n} dS = - \int_V \rho_{pol} dv$
 $\rho_{pol} = -\nabla \cdot \vec{P}$
 $\sigma_{pol} = \vec{P} \cdot \vec{n}_{ext}$
- $\phi_P = \int_P^{Ref} \vec{E} \cdot d\vec{l}$
 $\vec{E} = -\nabla\phi$
- $\vec{D} = \vec{P} + \epsilon_0\vec{E}$
 $\vec{D} = \epsilon_0(1 + \chi_E)\vec{E} = \epsilon\vec{E}$
- $Q = CV$
- $U_E = \left[\frac{1}{2}\right] \sum_i q_i \phi_i$
- $u_E = \frac{1}{2}\epsilon E^2$
 $U_E = \int_V u_E dv$
- $\vec{F}_s = \pm \frac{dU_E}{ds} \vec{u}_s$

Corrente eléctrica estacionária

- $\vec{J} = Nq\vec{v}$
- $\vec{J} = \sigma_c\vec{E}$
- $I = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS$
- $p = \vec{J} \cdot \vec{E}$
- $\oint_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dv$
 $\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{d\rho}{dt}$

Ondas electromagnéticas

- $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$
- $\vec{n} = \frac{\vec{\kappa}}{\kappa} = \frac{\vec{E}}{E} \times \frac{\vec{B}}{B}$
- $\frac{E}{B} = v$
- $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$
- $u = u_E + u_M$
- $I = \langle \vec{S} \cdot \vec{n} \rangle$

Magnetostática

- $\vec{B} = \int_{\Gamma} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{u}_r}{r^2}$
 $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ H/m}$
- $d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$
- $\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0$
 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$
- $\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS$
 $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$
- $\vec{B} = \mu_0(\vec{M} + \vec{H})$
 $\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu\vec{H}$
- $\oint_{\Gamma} \vec{M} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}_M \cdot \vec{n} dS$
 $\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$
 $\vec{J}'_M = \vec{M} \times \vec{n}_{ext}$

Interacção de partículas e campos

- $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

Campos variáveis e indução

- $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$
 $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- $\Phi_i = L_i I_i + M_{ij} I_j$
- $U_M = \left[\frac{1}{2}\right] \sum_i \Phi_i I_i$
- $u_M = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$
 $U_M = \int_V u_M dv$
- $\vec{F}_s = \pm \frac{dU_M}{ds} \vec{u}_s$
- $\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS$
 $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Algumas Primitivas

$$\int \frac{dx}{(x^2 + b)^{3/2}} = \frac{1}{b} \frac{x}{\sqrt{x^2 + b}}$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + b}} = \sqrt{x^2 + b}$$

$$\int \frac{dx}{x(x+a)} = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{x}{x+a}\right)$$

$$\int \frac{xdx}{(x^2 + b)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + b}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + b})$$

Para o cálculo analítico de integrais pode ser consultado o endereço web: <http://integrals.wolfram.com>

Coordenadas cartesianas (x, y, z)

$$d\vec{l} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$$

$$dS = dx dy$$

$$dV = dx dy dz$$

$$\vec{\nabla} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (A_x, A_y, A_z)$$

Coordenadas polares (r, θ)

$$d\vec{l} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta$$

$$dS = r dr d\theta$$

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

$$d\vec{l} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

$$dV = r dr d\theta dz$$

$$\vec{\nabla} F = \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

$$d\vec{l} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \operatorname{sen}\theta d\phi \vec{u}_\phi$$

$$dV = r^2 dr \operatorname{sen}\theta d\theta d\phi$$

$$\vec{\nabla} F = \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial F}{\partial \phi} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\operatorname{sen}\theta A_\theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (A_\phi)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left[\frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial(\operatorname{sen}\theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial(\operatorname{sen}\theta A_\theta)}{\partial \phi} \right] \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} \right] \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{u}_\phi$$

Teorema da Divergência

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

Teorema da Stokes

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{A} dS = \oint_\Gamma \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

Identidades vectoriais

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$