

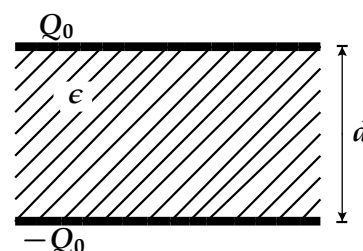


2º Exame: Resolução

- Durante a realização do teste/exame não é permitido o uso de telemóveis e calculadoras.
- Identifique claramente todas as folhas do teste/exame.
- Resolva os grupos em páginas separadas.
- Realize sempre em primeiro lugar os cálculos analíticos e só no final substitua pelos valores numéricos.

Duração do exame: 3H00.

1. Considere o condensador plano representado na figura. A área das placas condutoras é A e a distância entre elas é d ($d \ll \sqrt{A}$). O condensador está preenchido por um dielétrico linear, homogéneo e isótropo de permitividade eléctrica ϵ . As placas do condensador estão carregadas com cargas eléctricas $\pm Q_0$ ($Q_0 > 0$). Determine:



a) [1,0] o vector \vec{D} nas regiões dentro e fora do condensador na aproximação $d \ll \sqrt{A}$.

Resolução:

Usamos a lei de Gauss generalizada $\int_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = Q_{\text{int}}$. Por razões de simetria e nas condições $d \ll \sqrt{A}$, o campo, onde existir, é perpendicular aos condutores e dirigido das cargas positivas para as cargas negativas. Escolhendo cilindros rectos, com eixo normal ao plano dos condutores e com uma das bases dentro do condutor podemos mostrar facilmente que $\vec{D} = \mathbf{0}$ fora do condensador e que dentro temos

$$\int_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = Q_{\text{int}} \rightarrow |\vec{D}|S = \sigma S \rightarrow |\vec{D}| = \sigma = \frac{Q_0}{A}$$

e dirigido do condutor carregado positivamente para o condutor carregado negativamente.

b) [1,0] a diferença de potencial, V , entre as placas condutoras em função da carga eléctrica Q_0 .

Resolução:

O campo \vec{E} é paralelo a \vec{D} e tal que $|\vec{E}| = \frac{Q_0}{\epsilon A}$. Escolhendo um caminho perpendicular aos condutores temos

$$V = \int_1^2 \vec{E} \cdot \vec{dl} = |\vec{E}|d = \frac{Q_0 d}{\epsilon A}$$

c) [1,0] A densidade de carga de polarização, σ' , junto à superfície da placa carregada negativamente.

Resolução:

Temos $\sigma' = \vec{P} \cdot \vec{n}_{\text{ext}}$ onde \vec{n}_{ext} é a normal exterior ao dielétrico na fronteira com o condutor carregado negativamente. Por outro lado, como o dielétrico é linear, isotrópico e homogêneo devemos ter

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \vec{D} = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \frac{Q_0}{A} \vec{n}$$

onde $\vec{n} \parallel \vec{n}_{\text{ext}}$ é um vector unitário na direcção perpendicular aos condutores e dirigido do condutor carregado positivamente para o condutor carregado negativamente. Obtemos finalmente

$$\sigma' = \vec{P} \cdot \vec{n}_{\text{ext}} = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \frac{Q_0}{A} > 0$$

d) Admita agora na resolução das alíneas que se seguem, que o dielétrico de permitividade ϵ não é perfeito (isto é, permite a passagem de corrente) e que tem uma condutividade eléctrica σ_c . Considere que no instante $t = 0$ a carga no condutor carregado positivamente é $Q(0) = Q_0$.

d.1) [1,0] Mostre que a lei de variação da carga eléctrica existente na placa carregada positivamente, é ao longo do tempo: $Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\sigma_c}{\epsilon} t}$.

Resolução:

A equação da conservação da carga eléctrica é

$$-\frac{dQ}{dt} = \int \vec{j} \cdot \vec{n} dS = \sigma_c \int \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \sigma_c |\vec{E}| A = \frac{\sigma_c}{\epsilon} Q(t)$$

com a condição inicial $Q(0) = Q_0$. A equação diferencial

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{\sigma_c}{\epsilon} Q(t)$$

com essa condição, tem a solução

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\sigma_c}{\epsilon} t}$$

d.2) [0,5] Determine a energia total dissipada por efeito de Joule até o condensador estar completamente descarregado.

Resolução:

Este problema pode ser resolvido de várias maneiras, qualquer delas válida. Deixamos aqui três métodos possíveis.

● 1º Método

A energia total dissipada deverá ser igual, por conservação de energia, à energia inicial armazenada no condensador. Assim

$$U_{\text{Joule}} = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C}$$

Falta calcular C . Mas usando os resultados anteriores obtemos

$$C = \frac{Q_0}{V} = \frac{\epsilon A}{d}$$

logo

$$U_{\text{Joule}} = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2 d}{\epsilon A}$$

● 2º Método

Usando a densidade de potência dissipada por efeito de Joule, $p_{\text{Joule}} = \vec{j} \cdot \vec{E}$, podemos obter a potência dissipada por efeito de Joule num instante t ,

$$P_{\text{Joule}}(t) = \int_V \vec{j}(t) \cdot \vec{E}(t) dV = \sigma_c |\vec{E}(t)|^2 Ad = \sigma_c \left(\frac{Q(t)}{\epsilon A} \right)^2 Ad = \frac{\sigma_c d}{\epsilon^2 A} Q(t)^2$$

A energia total dissipada por efeito de Joule será então

$$U_{\text{Joule}} = \int_0^\infty dt P_{\text{Joule}}(t) = \frac{\sigma_c d}{\epsilon^2 A} Q_0^2 \int_0^\infty dt e^{-2\frac{\sigma_c}{\epsilon}t} = \frac{\sigma_c d}{\epsilon^2 A} Q_0^2 \frac{\epsilon}{2\sigma_c} = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2 d}{\epsilon A}$$

● 3º Método

O 3º método consiste em encontrar a potência dissipada por efeito de Joule através da relação $P_{\text{Joule}}(t) = RI^2(t)$. Para isso temos de encontrar a resistência. Como vimos (agora as quantidades variam com o tempo)

$$V(t) = \frac{Q(t) d}{\epsilon A}$$

Por outro lado

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = \frac{\sigma_c}{\epsilon} Q(t)$$

e portanto

$$R = \frac{V(t)}{I(t)} = \frac{d}{\sigma_c A}$$

Pondo tudo junto

$$P_{\text{Joule}}(t) = RI^2(t) = \frac{d}{\sigma_c A} \left(\frac{\sigma_c}{\epsilon} Q(t) \right)^2 = \frac{d \sigma_c Q_0^2}{\epsilon^2 A} e^{-2\frac{\sigma_c}{\epsilon}t}$$

e finalmente

$$U_{\text{Joule}} = \int_0^\infty dt P_{\text{Joule}}(t) = \frac{d \sigma_c Q_0^2}{\epsilon^2 A} \int_0^\infty dt e^{-2\frac{\sigma_c}{\epsilon}t} = \frac{\sigma_c d}{\epsilon^2 A} Q_0^2 \frac{\epsilon}{2\sigma_c} = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2 d}{\epsilon A}$$

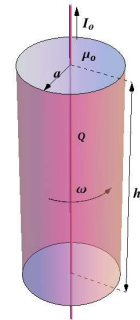
Notar que nos 2º e 3º métodos σ_c desaparece do problema, como devia (ver alínea seguinte).

d.3) [0,5] Dado que o resultado da alínea d.2) não depende da condutividade eléctrica σ_c , desde que $\sigma_c > 0$, explique então, justificando, qual o papel de σ_c .

Resolução:

O resultado não depende de σ_c , depende só da energia inicial. O papel de σ_c tem a ver com a maior ou menor rapidez com que a carga é descarregada. De facto $\frac{\epsilon}{\sigma_c}$ representa o tempo ao fim do qual a carga inicial se reduziu a $1/e$ do seu valor. Quanto maior for σ_c , menor é esse tempo.

2. Uma película cilíndrica oca isolante de altura h e raio a ($h \gg a$) possui uma carga eléctrica $Q > 0$ espalhada uniformemente à superfície. A película cilíndrica, preenchida de ar, encontra-se a rodar com velocidade angular ω constante. Determine:



a) [1,0] a densidade de corrente eléctrica superficial, \vec{J}_s e a corrente eléctrica total, I , existentes em consequência da rotação do cilindro.

Resolução:

A densidade de carga eléctrica na superfície do cilindro: $\sigma = \frac{Q}{2\pi ah}$

A velocidade das cargas eléctricas: $\vec{v} = \omega a \vec{e}_\theta$

A densidade de corrente eléctrica: $\vec{J}_s = \sigma v \vec{e}_\theta = \frac{Q}{2\pi h} \omega \vec{e}_\theta$ [A/m]

Para se obter a corrente eléctrica total, a integração faz-se somente na altura do cilindro uma vez que a densidade de corrente é pelicular, isto é, possui dimensões de A/m:

$$I = J_s h = \frac{Q}{2\pi} \omega$$
 [A]

b) [1,0] o campo magnético, \vec{B} , assumindo que este é uniforme, no interior do cilindro.

Resolução:

Lei de Ampère: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{tot}$

Escolhendo um caminho rectangular de altura ℓ , tem-se:

$$B\ell = \mu_0 J_s \ell \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 J_s \vec{e}_z = \mu_0 \frac{Q}{2\pi h} \omega \vec{e}_z$$

c) [0,5] a força magnética existente sobre um condutor rectilíneo colocado no eixo do cilindro, percorrido por uma corrente estacionária I_0 . Nota: caso não tenha realizado a alínea b), considere o campo magnético $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$

Resolução:

Como, $\vec{B} \parallel I_0 d\vec{\ell}$, tem-se: $\vec{F} = \vec{0}$

d) Admita agora que o cilindro passa a rodar com uma velocidade angular variável no tempo, $\omega(t) = \omega_0 t$ e que no seu interior é colocado um material ferromagnético de permeabilidade variável em função da distância ao eixo cilindro, $\mu(r) = \mu_0 e^{(1-r/a)}$. Determine:

d.1) [0,5] o campo magnético $\vec{B}(t)$ num ponto P a uma distância $r = \frac{a}{2}$ do eixo do cilindro.

Resolução:

Lei de Ampère generalizada: $\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{liv}$

Escolhendo um caminho rectangular de altura ℓ , tem-se:

$$H\ell = J_s \ell \Rightarrow \vec{H} = J_s \vec{e}_z = \frac{Q}{2\pi h} \omega \vec{e}_z$$

$$\vec{B}(r) = \mu(r) \vec{H} = \mu_0 e^{(1-r/a)} \frac{Q}{2\pi h} \omega \vec{e}_z$$

$$\vec{B}(r = \frac{a}{2}) = \mu_0 \sqrt{e} \frac{Q}{2\pi h} \omega \vec{e}_z$$

d.2) [1,0] a densidade de corrente de magnetização em volume, \vec{J}_M , existente no interior do material ferromagnético.

Resolução:

O vector magnetização: $\vec{M} = \chi_m \vec{H} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \vec{H} = \frac{Q}{2\pi h} \omega \left[e^{(1-r/a)} - 1 \right] \vec{e}_z$

Dado que o vector Magnetização só possui componente segundo o eixo z , vem para a densidade de corrente de magnetização:

$$\vec{J}_m = \vec{\nabla} \times \vec{M} = -\frac{\partial M}{\partial r} \vec{e}_\theta = \frac{Q}{2\pi ah} \omega e^{(1-r/a)} \vec{e}_\theta$$

d.3) [1,0] o campo eléctrico \vec{E} existente no ponto P , descrito na alínea d.1).

Resolução:

Lei da indução de Faraday: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$

Definindo um caminho Γ circular concêntrico com o eixo do cilindro e admitindo que dada a simetria do problema, o campo \vec{E} só depende da distância ao eixo r e tenha uma direcção tangencial ao caminho Γ , tem-se:

$$E2\pi\frac{a}{2} = E\pi a = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

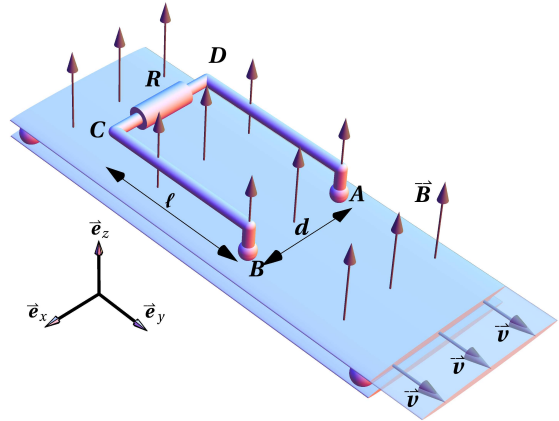
Integrando o campo \vec{B} na área definida pelo caminho Γ :

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int B(r)rdr d\theta = \mu_0 \frac{Q}{2\pi h} \omega \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a/2} e^{(1-r/a)} r dr = \mu_0 \frac{Q}{h} a^2 \sqrt{e} (\sqrt{e} - 3/2) \omega$$

Vem então para o campo eléctrico:

$$\vec{E} = -\mu_0 \frac{Q}{\pi h} a \sqrt{e} (\sqrt{e} - 3/2) \omega_0 \vec{e}_\theta$$

3. Um circuito condutor de resistência R em forma de U , com comprimento ℓ e largura d , está imóvel e é terminado nas extremidades por contactos flutuantes A e B sobre uma correia condutora fina, também de largura d e resistividade desprezável, que se move paralelamente ao circuito no seu sentido longitudinal, com velocidade uniforme \vec{v} . Um campo magnético homogéneo \vec{B} existe perpendicularmente à correia e ao plano do circuito. (Despreze a aparente diferença que aparece na imagem entre a largura da correia e distância entre os pontos A e B .)



a) [1,0] Calcule a força por unidade de carga que é exercida sobre as cargas móveis da correia condutora em movimento, assumindo que \vec{B} é constante no tempo.

Resolução:

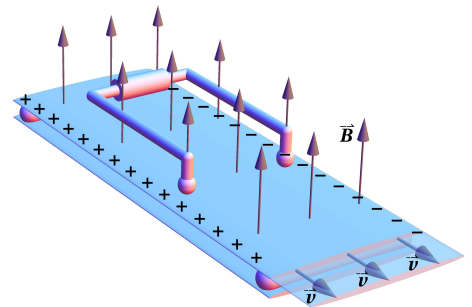
$$\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B} \implies \frac{\vec{F}_m}{q} = \vec{v} \times \vec{B} = v B \vec{e}_y \times \vec{e}_z = v B \vec{e}_x$$

b) [1,0] Mostre esquematicamente onde é que estas cargas móveis se acumulam na correia. Determine o campo \vec{E} gerado por essas cargas assumindo que se atinge um equilíbrio antes da correia chegar aos pontos A e B .

Resolução:

Pela direcção da força magnética é de esperar que as cargas negativas (electrões) migrem para a borda direita da correia, deixando um desequilíbrio positivo na borda esquerda, como se vê na figura ao lado. Numa situação de equilíbrio longe dos contactos A e B deixa de existir movimento de cargas na correia, porque o campo electrostático \vec{E} gerado pelas cargas nas bordas da correia deve ser tal que

$$\vec{E} = -\frac{\vec{F}_m}{q} = -\vec{v} \times \vec{B} = -v B \vec{e}_x$$



c) [0,5] Qual é a tensão V_{AB} que deve existir então entre os contactos A e B .

Resolução:

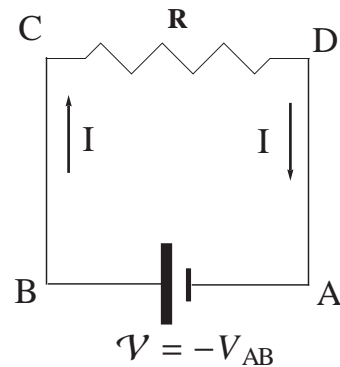
$$V_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = - \int_{BA} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{BA} \frac{\vec{F}_m}{q} \cdot d\vec{l} = \int_d^0 v B dl = -v B d$$

d) [1,0] Faça um esquema dum circuito eléctrico equivalente nestas condições e determine a magnitude e direcção da corrente I induzida no condutor em U . Determine a força magnética \vec{F}_m exercida sobre o circuito.

Resolução:

Em analogia com o circuito à direita, deve existir no circuito uma corrente de magnitude $I = \frac{V_{AB}}{R} = -\frac{vBd}{R}$ ou seja \odot de A para B . As forças magnéticas resultantes no circuito actuam apenas nos braços horizontais, e anulam-se mutuamente para os que estão paralelos porque são percorridos por correntes em sentidos opostos, pelo que

$$\vec{F}_m = \int_{BCDA} I d\vec{\ell} \times \vec{B} = \frac{vB^2 d^2}{R} \vec{e}_y$$



- e) [0,5] Mostre utilizando a lei de Faraday que a força electromotriz ε_{fem} induzida pelo campo magnético no circuito é igual à tensão calculada na alínea b) pelo campo eléctrico de Hall.
Sugestão: Mostre que é irrelevante a escolha do trajecto na correira usado para fechar o circuito entre A e B por isso escolha o mais simples para determinar o fluxo de \vec{B} na Lei de Faraday.

Resolução:

O campo eléctrico \vec{E} de Hall aqui é constante, pelo que é conservativo, logo não interessa o trajecto que se use para ligar A e B para calcular a tensão V_{AB} . Por outro lado, em termos de fluxo, uma vez que \vec{B} é constante, a única contribuição para a f.e.m. tem de vir da deformação desse trajecto e tem que igualar V_{AB} . Sendo assim qualquer trajecto deve ser bom. Usando um circuito rectilíneo entre A e B , podemos ver que num intervalo Δt este vai varrer uma área $\Delta S = \Delta t v d$. Assim o fluxo através do circuito vai variar no tempo porque

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{B} \cdot \Delta \vec{S}}{\Delta t} \rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = vBd$$

se $\Delta \vec{S} \parallel \vec{B}$. A força electromotriz induzida será então

$$\varepsilon_{fem} = -\frac{d\Phi}{dt} = -vBd$$

Esta f.e.m. causa uma corrente $I = -\frac{vBd}{R}$.

- f) [1,0] Assumindo agora que o campo magnético varia harmonicamente em magnitude como $B(t) = B_o \cos(\omega t)$, e que o circuito tem uma auto-indução L escreva a equação diferencial que descreve o circuito eléctrico equivalente.

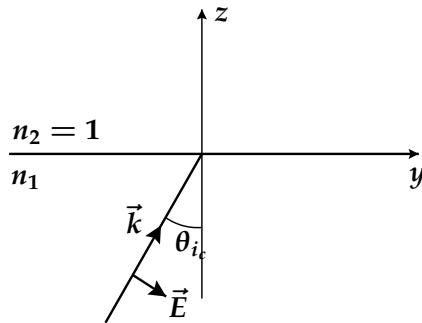
Resolução:

Neste caso existe uma variação de fluxo causado não só pela deformação do contorno do circuito, como pela própria dependência explícita em t de $\vec{B}(t)$. Usando as leis de Kirchof podemos concluir que

$$RI + L \frac{dI}{dt} = V_{AB} - \iint_{S_{ABCD}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -v B_o d \cos(\omega t) + \ell \omega B_o d \sin(\omega t)$$

$$RI + L \frac{dI}{dt} = B_o d \sqrt{\omega^2 \ell^2 + v^2} \sin \left(\omega t - \tan^{-1} \left(\frac{v}{\omega \ell} \right) \right)$$

4. Considere uma onda plana monocromática que se propaga num meio não magnético, ($\mu_1 = \mu_0$), com permitividade $\epsilon_1 = 4\epsilon_0$. Conforme indicado na figura, esta onda incide na superfície de separação ($z = 0$) do meio com o vazio com um ângulo de incidência igual ao ângulo crítico de reflexão total, isto é, $\theta_i = \theta_c$.



O campo \vec{E} da onda é dado por

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = \beta E_0 \sin [\omega t - |\vec{k}| (\alpha y + \beta z)] \\ E_z = -\alpha E_0 \sin [\omega t - |\vec{k}| (\alpha y + \beta z)] \end{cases}$$

Determine:

- a) [0,5] o ângulo de incidência da onda, θ_{i_c} .

Resolução:

A condição para o ângulo crítico de reflexão total, θ_{i_c} , é $\theta_r = \pi/2$. Obtemos portanto da lei de Snell-Descartes

$$n_1 \sin \theta_{i_c} = n_2 \rightarrow \sin \theta_{i_c} = \frac{n_2}{n_1}$$

Como $n_2 = 1$, temos de determinar n_1 .

$$n_1 = \frac{c}{v_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{4} = 2$$

Logo

$$\sin \theta_{i_c} = \frac{1}{2} \rightarrow \theta_{i_c} = \frac{\pi}{6} \quad (\text{ou } 30^\circ)$$

Notemos ainda que $\cos \theta_{i_c} = \sqrt{3}/2$.

- b) [1,0] as constantes α e β e mostre que a onda é transversal.

Resolução:

Da fase da onda resulta que

$$k_x = 0, \quad k_y = |\vec{k}| \alpha, \quad k_z = |\vec{k}| \beta$$

e portanto um vector unitário na direcção da propagação será

$$\vec{n} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} = \alpha \vec{e}_y + \beta \vec{e}_z$$

Das condições do problema (ver figura), temos

$$\vec{n} = \sin \theta_{i_c} \vec{e}_y + \cos \theta_{i_c} \vec{e}_z = \frac{1}{2} \vec{e}_y + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_z$$

Comparando obtemos

$$\alpha = \sin \theta_{i_c} = \frac{1}{2}, \quad \beta = \cos \theta_{i_c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

No resto do problema vamos usar α e β genéricos, só usando a relação de normalização $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Assim

$$\vec{n} \cdot \vec{E} = (\alpha \vec{e}_y + \beta \vec{e}_z) \cdot (\beta \vec{e}_y - \alpha \vec{e}_z) E_0 \sin [\omega t - |\vec{k}| (\alpha y + \beta z)] = (\alpha \beta - \beta \alpha) E_0 \sin [\dots] = 0$$

o que mostra o carácter transversal das ondas electromagnéticas.

c) [1,0] a polarização da onda.

Resolução:

As duas componentes do campo \vec{E} estão em fase (ambos senos do mesmo argumento) pelo que a polarização é linear. De facto

$$E_z = -\frac{\alpha}{\beta} E_y$$

d) [1,0] o campo \vec{H} da onda.

Resolução:

Temos $\vec{H} = \frac{1}{Z_1} \vec{n} \times \vec{E}$, onde Z_1 é a impedância de onda dada por

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} = \frac{1}{n_1} Z_0 = \frac{1}{2} Z_0, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \Omega$$

Calculando o produto externo

$$\vec{n} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \beta E_0 \sin[\dots] & -\alpha E_0 \sin[\dots] \end{vmatrix} = -(\alpha^2 + \beta^2) E_0 \sin[\dots] \vec{e}_x = -E_0 \sin[\dots] \vec{e}_x$$

obtemos para \vec{H}

$$\vec{H} = -\frac{2}{Z_0} E_0 \sin[\omega t - |\vec{k}|(\alpha y + \beta z)] \vec{e}_x$$

e) [1,0] o valor médio do vector de Poynting, $\langle |\vec{S}(t)| \rangle$.

Resolução:

Temos

$$|\vec{S}| = |\vec{E} \times \vec{H}| = |\vec{E}| |\vec{H}| = Z_1 |\vec{H}|^2 = \frac{2}{Z_0} E_0^2 \sin^2[\omega t - |\vec{k}|(\alpha y + \beta z)]$$

Portanto

$$\langle |\vec{S}| \rangle = \frac{1}{2} \frac{2}{Z_0} E_0^2 = \frac{1}{Z_0} E_0^2$$

onde se usou $\langle \sin^2[\dots] \rangle = 1/2$.

f) [0,5] Comente a seguinte afirmação no contexto da situação da figura:

Uma onda incide com um ângulo de incidência $\theta_i > \theta_{i_c}$ e com o campo \vec{E} paralelo ao plano de incidência. Se escolhermos $\theta_i = \theta_{i_B}$ (onde θ_{i_B} é o ângulo de Brewster) então não teremos nem onda reflectida nem onda transmitida.

Resolução:

Obviamente a afirmação não pode estar correcta pois, se fosse verdade, para onde iria a energia? O que acontece é que a situação descrita na afirmação implica que

$$\theta_{i_B} > \theta_{i_c}$$

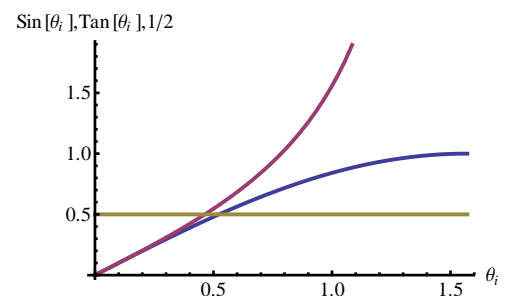
o que nunca pode acontecer. Para ver isso, basta notar que as condições

$$\sin \theta_{i_c} = \tan \theta_{i_B} = \frac{1}{2}$$

implicam

$$\theta_{i_B} < \theta_{i_c}$$

como se pode ver na figura



Formulário auxiliar para o problema 4:

$$\boxed{\begin{aligned} n_1 \sin \theta_i &= n_2 \sin \theta_r \\ \tan \theta_{i_B} &= \frac{n_2}{n_1} \end{aligned}}$$

Electrostática

- $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$
- $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ N.m}^2.\text{C}^{-2}$
- $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$
 $\nabla \times \vec{E} = 0$
- $\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = \int_V \rho_{liv} dv$
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{liv}$
- $\oint_S \vec{P} \cdot \vec{n} dS = - \int_V \rho_{pol} dv$
 $\rho_{pol} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$
 $\sigma_{pol} = \vec{P} \cdot \vec{n}_{ext}$
- $\phi_P = \int_P^{Ref} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$
 $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$
- $\vec{D} = \vec{P} + \epsilon_0 \vec{E}$
 $\vec{D} = \epsilon_0(1 + \chi_E) \vec{E} = \epsilon \vec{E}$
- $Q = CV$
- $U_E = \left[\frac{1}{2} \right] \sum_i q_i \phi_i$
- $u_E = \frac{1}{2} \epsilon E^2$
 $U_E = \int_V u_E dv$
- $\vec{F}_s = \pm \frac{dU_E}{ds} \vec{u}_s$

Corrente eléctrica estacionária

- $\vec{J} = Nq\vec{v}$
- $\vec{J} = \sigma_c \vec{E}$
- $I = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS$
- $p = \vec{J} \cdot \vec{E}$
- $\oint_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS = - \frac{d}{dt} \int_V \rho dv$
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \frac{d\rho}{dt}$

Ondas electromagnéticas

- $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$
- $\vec{n} = \frac{\vec{\kappa}}{\kappa} = \frac{\vec{E}}{E} \times \frac{\vec{B}}{B}$
- $\frac{E}{B} = v$
- $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$
- $u = u_E + u_M$
- $I = \langle \vec{S} \cdot \vec{n} \rangle$

Magnetostática

- $\vec{B} = \int_{\Gamma} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\ell} \times \vec{u}_r}{r^2}$
 $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ H/m}$
- $d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$
- $\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0$
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
- $\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS$
 $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$
- $\vec{B} = \mu_0(\vec{M} + \vec{H})$
 $\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H}$
- $\oint_{\Gamma} \vec{M} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J}_M \cdot \vec{n} dS$
 $\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}$
 $\vec{J}'_M = \vec{M} \times \vec{n}_{ext}$

Interação de partículas e campos

- $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

Campos variáveis e indução

- $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$
 $\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- $\Phi_i = L_i I_i + M_{ij} I_j$
- $U_M = \left[\frac{1}{2} \right] \sum_i \Phi_i I_i$
- $u_M = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$
 $U_M = \int_V u_M dv$
- $\vec{F}_s = \pm \frac{dU_M}{ds} \vec{u}_s$
- $\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS$
 $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Algumas Primitivas

$$\int \frac{dx}{(x^2 + b)^{3/2}} = \frac{1}{b} \frac{x}{\sqrt{x^2 + b}}$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + b}} = \sqrt{x^2 + b}$$

$$\int \frac{dx}{x(x+a)} = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{x}{x+a}\right)$$

$$\int \frac{x dx}{(x^2 + b)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + b}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + b}\right)$$

Para o cálculo analítico de integrais pode ser consultado o endereço web: <http://integrals.wolfram.com>

Coordenadas cartesianas (x, y, z)

$$d\vec{\ell} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$$

$$dS = dx dy$$

$$dV = dx dy dz$$

$$\vec{\nabla} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (A_x, A_y, A_z)$$

Coordenadas polares (r, θ)

$$d\vec{\ell} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta$$

$$dS = r dr d\theta$$

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

$$d\vec{\ell} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

$$dV = r dr d\theta dz$$

$$\vec{\nabla} F = \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

Coordenadas esféricas (r, θ, φ)

$$d\vec{\ell} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \operatorname{sen}\theta d\phi \vec{u}_\phi$$

$$dV = r^2 dr \operatorname{sen}\theta d\theta d\phi$$

$$\vec{\nabla} F = \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial F}{\partial \phi} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\operatorname{sen}\theta A_\theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (A_\phi)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left[\frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial (\operatorname{sen}\theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial (\operatorname{sen}\theta A_\theta)}{\partial \phi} \right] \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r A_\phi)}{\partial r} \right] \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{u}_\phi$$

Teorema da Divergência

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

Teorema da Stokes

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{A} dS = \oint_\Gamma \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

Identidades vectoriais

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$