INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Universidade Técnica de Lisboa

1º Exame

11 de Junho de 2012: 18H30

Duração do exame: 2H30

Mestrado em Eng. Electrotécnica e de Computadores (MEEC)
Electromagnetismo e Óptica
2º semestre de 2011-2012

Prof. Fernando Barão (Responsável)
Prof. Amaro Rica da Silva
Prof. Filipe Mendes

Avisos:

- Durante a realização do teste/exame não é permitido o uso de telemóveis e calculadoras.
- Identifique claramente todas as folhas do teste/exame.
- Inicie a resolução de cada um dos grupo numa nova página.
- Realize sempre em primeiro lugar os cálculos analíticos e só no final substitua pelos valores numéricos.

Problema 1:

Resolva as seguintes alíneas explicando claramente os seus cálculos.

[0,5] **a)** Determine a carga que atravessa por segundo a secção $S = 0,1\ cm^2$ dum condutor, sabendo que este possui uma densidade volúmica $\rho = 1,5\ 10^4\ C/cm^3$ de cargas livres, em movimento com velocidade média $v = 1\ mm/s$.

Resolução

$$\frac{dq}{dt} = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} = \rho v S = 150\ A$$

[1,0] **b)** Um fio condutor com a secção $S = 0,1\ cm^2$ é percorrido por uma corrente $I = 15\ A$. A sua resistividade é $\rho = 2 \times 10^{-8}\ \Omega m$. Determine o módulo do campo eléctrico dentro do fio.

Resolução

$$J = \sigma_c E = \frac{E}{\rho} \Rightarrow E = \rho J = 2 \times 10^{-8} \frac{15}{10^{-5}} = 30\ mV/m$$

[0,5] **c)** Suponha que uma pessoa ao cair de um andaime se agarrou a um cabo de alta tensão com as duas mãos. O cabo tem uma resistência por unidade de comprimento de $60\ \mu\Omega/m$ e é percorrido por uma corrente de $1000\ A$. Supondo que as mãos estão agarradas ao cabo a $1\ m$ uma da outra, verifique se a pessoa se arrisca a ser eletrocutada.

Resolução

A pessoa agarrada ao cabo corresponde a um paralelo de resistências entre a resistência de $1m$ *de cabo* R_c *e a resistência eléctrica da pessoa* R_h*:*

$$R_{eq} = \frac{R_c R_h}{R_c + R_h} \sim R_c \ \ \textit{uma vez que } R_h >> R_c$$
$$V = R_{eq} I \sim R_c I = 6 \times 10^{-5}\ 10^3 = 0,06V$$

O que é insuficiente para electrocutar.

[0,5] **d)** Um troço AB, de comprimento ℓ, pertencente a uma espira rectangular condutora é percorrido por uma corrente $I = 1A$. Determine a sua contribuição para o campo magnético $\vec{B}$ num ponto P à distância r do troço. (ver figura 1.1).

Resolução
Pela lei de Biot-Savart e tendo em conta que o vector posição $\vec{r}$ é colinear com o troço, obtém-se um campo $B_{AB} = 0$.

[1,0] **e)** Determine o campo magnético no centro de uma espira circular percorrida por uma corrente $I = 1A$ e de raio $R = \pi\ cm$.

Resolução

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{\ell} \times \vec{e}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{R d\theta}{R^2} \vec{e}_z \Rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} \int_0^{2\pi} d\theta \vec{e}_z = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{R} \vec{e}_z = 2\ 10^{-5}\ T$$

[0,5] **f)** Determine o sentido de circulação (horário ou anti-horário) da corrente elétrica induzida numa espira de área S atravessada por um campo magnético $\vec{B} = B_0\ \ln(t)\vec{e}_z$ (ver figura 1.2).

Resolução
Lei de Faraday:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Como o fluxo do campo B aumenta, a corrente induzida opõe-se a este aumento, circulando portanto no sentido horário.

[1,0] **g)** Considere um condensador com armaduras paralelas circulares de raio $R = 3,0\ cm$ que se descarrega através de um dado circuito. Sabendo que num dado instante t a corrente no circuito é $i = 2,5\ A$, determine o campo magnético num ponto entre as armaduras, à distância $r = 2,0\ cm$ do eixo do condensador (ver figura 1.3).

Resolução
A corrente total de deslocamento entre as placas do condensador é: $i = i_D = \frac{d}{dt}\left(\int_{S=\pi R^2} \vec{D} \cdot d\vec{S}\right)$
Tendo em conta que entre as placas do condensador, o cáclculo do campo magnético se faz a partir de $\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = i_D^{int}$ e que a corrente de deslocamento interior à circulação de raio r é $i_D^{int} = i\left(\frac{r}{R}\right)^2$, obtém-se para o campo:

$$H 2\pi r = i\left(\frac{r}{R}\right)^2 \Rightarrow \vec{H} = \frac{i}{2\pi} \frac{r}{R^2} \vec{e}_\theta = \frac{2,5}{2\pi} \frac{2}{3^2 \times 10^{-2}} \vec{e}_\theta = \frac{2,5 \times 10^4}{9\pi} \vec{e}_\theta\ A/m$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \frac{10^{-4}}{9} \vec{e}_\theta\ T$$

[0,5] **h)** Determine a velocidade de propagação de uma onda eletromagnética num meio de permitividade elétrica $\varepsilon_r = 4$ e permeabilidade magnética μ_0.

Resolução

$$v = \frac{1}{\sqrt{4\mu_0\varepsilon_0}} = \frac{c}{2}$$

[1,0] **i)** Escreva a expressão do campo elétrico de amplitude $10\ Vm^{-1}$, associado a uma onda eletromagnética monocromática de frequência angular ω, polarizada linearmente segundo xx e que se propaga no vácuo, numa direção cujo ângulo com o eixo dos yy é $30\ ^o$.

Resolução

$$\vec{E} = 10\ cos\left[\omega t - \frac{\omega}{c}(\sqrt{3}/2y + 1/2z)\right] \vec{e}_x$$

[1,0] **j)** Uma onda eletromagnética plana, monocromática e polarizada circularmente, desloca-se no ar e incide sobre a superfície plana de um material dielétrico com $\varepsilon_r = 4$, $\mu_r = 1$. Determine o ângulo de incidência θ_i para qual a onda refletida está polarizada linearmente.

Resolução
Trata-se do ângulo de Brewster. Para o determinarmos sabemos que o índice de refracção do material é $n_{mat} = c/v_{mat} = 2$ *e que pela lei de Snell se tem:*

$$n_{ar} sen\theta_i = n_{mat} sen\theta_t$$

Juntando a condição do ângulo de Brewster, $\theta_i + \theta_t = \pi/2$*, obtém-se:*

$$n_{ar}\ sen\theta_B = n_{mat}\ sen(\pi/2 - \theta_B) = n_{mat}\ cos(\theta_B)\ \Rightarrow\ tan(\theta_B) = n_{mat}$$

[1,0] **k)** Um feixe de ondas monocromáticas e polarizadas linearmente propaga-se no ar e incide com um ângulo de $60°$ numa superfície de separação entre dois meios. A intensidade da radiação incidente na superfície de separação é de $3/\pi\ 10^{-3}\ W/m^2$. Determine a amplitude do campo eléctrico da onda incidente.

Resolução
A intensidade de radiação incidente na superfície de separação é:

$$\left\langle |\vec{S}\cdot\vec{n}| \right\rangle = \left\langle |\vec{S}| \right\rangle\ cos(60) = cos(60)\ c\ \varepsilon_0 \left\langle E^2 \right\rangle = cos(60)\ c\ \varepsilon_0 \frac{1}{2} E_0^2 = 3/\pi\ 10^{-3}\ \Rightarrow\ E_0 = 1,2\ V/m$$

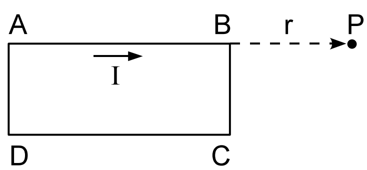


Figura 1.1

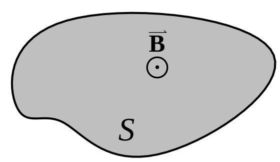


Figura 1.2

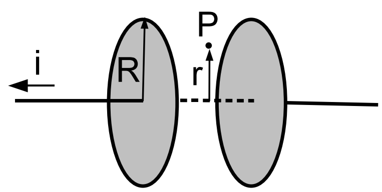


Figura 1.3

Problema 2:

Uma esfera condutora de raio a e imersa no vazio encontra-se a um potencial elétrico ϕ_0 em relação ao infinito (potencial nulo).

[1,5] **a)** Determine o campo elétrico existente dentro e fora da esfera e a sua carga elétrica total Q.

Resolução
O campo eléctrico no interior da esfera é nulo enquanto que no seu exterior é dado por:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$
$$\phi_0 = \int_a^\infty \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} \Rightarrow Q = 4\pi\varepsilon_0 a\phi_0$$

[0,5] **b)** Determine as densidades de carga elétrica em volume (ρ) e à superfície da esfera (σ)

Resolução

$$\rho = 0$$
$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a^2} = \frac{4\pi\varepsilon_0 a\phi_0}{4\pi a^2} = \frac{\varepsilon_0}{a}\phi_0$$

[0,5] **c)** Determine a capacidade da esfera condutora em relação ao infinito.

Resolução

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon_0 a\phi_0}{\phi_0} = 4\pi\varepsilon_0 a$$

[1,0] **d)** De seguida, liga-se a esfera à Terra através de uma resistência eléctrica R. Represente o circuito eléctrico equivalente e diga qual a carga existente na esfera ao fim de um tempo muito longo. Justifique.

Resolução
O circuito é constituído por um condensador e uma resistência em série. A esfera descarrega-se com uma constante de tempo RC, igualando o o potencial da Terra.

Admita agora que se coloca a esfera condutora, que se encontra com a carga eléctrica Q calculada na alínea a), semi-enterrada num material dielétrico de permitividade elétrica ε como se mostra na figura. Note que as linhas de campo eléctrico continuam radiais.

[0,5] **e)** Diga, justificando, qual a relação entre os campos elétricos dos dois meios.

Fazendo uma circulação na interface dos dois meios, obtém-se: **Resolução**

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \Rightarrow E_1 = E_2$$

[1,0] **f)** Determine as densidades de carga elétrica existente em cada semi-esfera do condutor.

Resolução
Junto à superfície do condutor tem-se, utilisando a lei de Gauss:

$$\sigma_1 = D_1 = \varepsilon_0 E_1$$
$$\sigma_2 = D_2 = \varepsilon E_2$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}$$

Tem-se assim:

$$(\sigma_1 + \sigma_2) 2\pi a^2 = Q \Rightarrow \sigma_2 \left(1 + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) 2\pi a^2 = Q$$

$$\Rightarrow \sigma_2 = \frac{Q}{2\pi a^2} \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \frac{Q}{2\pi a^2} \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0}$$

[1,0] **g)** Determine a densidade de carga de polarização existente na superfície do dielétrico encostada à esfera.

Resolução

$$\vec{E} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon}$$

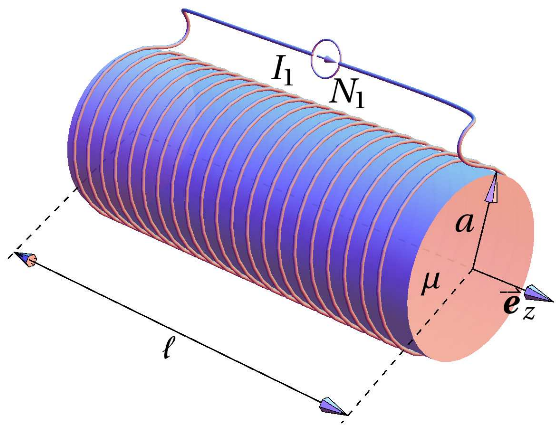
$$\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \frac{Q}{2\pi a^2} \frac{1}{\varepsilon + \varepsilon_0} \vec{e}_r$$

$$\sigma_{pol} = \vec{P}(r = a) \cdot (-\vec{e}_r) = -(\varepsilon - \varepsilon_0) \frac{Q}{2\pi a^2} \frac{1}{\varepsilon + \varepsilon_0}$$

O potencial da esfera alterou-se...

Problema 3:

Considere um eletroíman cilíndrico, constituído por um núcleo de material ferromagnético de permeabilidade magnética μ (com $\mu \gg \mu_0$), raio a e comprimento ℓ e por um enrolamento de N_1 espiras percorrido por uma corrente elétrica I_1. Tendo em conta a aproximação do eletroíman infinito ($\ell \gg a$), determine:



[1,0] **a)** o campo magnético $\vec{H}$ no interior do eletroíman.

Resolução

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{liv}^{int} \;\Rightarrow\; Hx = \frac{N_1}{\ell} x I_1 \;\Rightarrow\; \vec{H} = \frac{N_1}{\ell} I_1 (-\vec{e}_z) \;\; [A/m]$$

[1,0] **b)** o fluxo do campo magnético $\vec{B}$ que atravessa cada espira do enrolamento de raio a.

Resolução

$$\Phi_B^{espira} = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu \frac{N_1}{\ell} I_1 \pi a^2 \;\; [Wb]$$

[0,5] **c)** o coeficiente de auto-indução, L, do eletroíman.

Resolução

$$\Phi = L I_1 = N_1 \Phi_B^{espira} \;\Rightarrow\; L = \mu \frac{N_1^2}{\ell} \pi a^2 \;\; [H]$$

[1,0] **d)** a energia magnética armazenada no eletroíman.

Resolução

$$U_m = \frac{1}{2} \Phi I_1 = \frac{\mu}{2} \frac{N_1^2}{\ell} \pi a^2 I_1^2 \;\; [J]$$

[1,0] **e)** as correntes de magnetização, $\vec{J}_M$, existentes no material ferromagnético.

Resolução

$$\vec{J}'_M = \vec{M} \times \vec{n}_{ext} = (\mu_r - 1)H(-\vec{e}_z) \cdot \vec{e}_r = (\mu_r - 1)\frac{N_1}{\ell} I_1(-\vec{e}_\theta)$$
$$\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M} = 0$$

[1,0] **f)** qual o raio que o núcleo ferromagnético deve ter de forma a reduzir a energia do electroíman a metade.

Resolução

Designando a área transversa do electroíman como S_T e as áreas parciais do núcleo ferromagnético de raio r, S, e a área transversa do núcleo de ar, S_0, e ainda os campos magnéticos no material ferromagnético B e no ar B_0, vem para a relação das energias:

$$\frac{1}{4} B S_T N_1 I_1 = \frac{1}{2}(BS + B_0 S_0) N_1 I_1 \;\Rightarrow\; B S_T = 2(BS + B_0 S_0)$$
$$S_T = S + S_0$$

$$B S_T = 2(BS + B_0 S_0) \;\Rightarrow\; B S_T = 2\left[BS + B_0\left(S_T - S\right)\right] \;\Rightarrow\; S_T\left(B - 2B_0\right) = S\left(2B - 2B_0\right)$$
$$S = S_T \frac{\mu_r/2 - 1}{\mu_r - 1} \;\Rightarrow\; r = a\sqrt{\frac{\mu_r/2 - 1}{\mu_r - 1}}$$

	30°	45°	60°
sen	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
cos	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$

Electrostática

- $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r$
- $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times10^9 N.m^2.C^{-2}$
- $\oint_\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0$
  $\nabla\times\vec{E} = 0$
- $\oint_S \vec{D}\cdot\vec{n}\,dS = \int_V \rho_{liv}\,dv$
  $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{liv}$
- $\oint_S \vec{P}\cdot\vec{n}\,dS = -\int_V \rho_{pol}dv$
  $\rho_{pol} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$
  $\sigma_{pol} = \vec{P}\cdot\vec{n}_{ext}$
- $\phi_P = \int_P^{Ref}\vec{E}\cdot d\vec{\ell}$
  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$
- $\vec{D} = \vec{P} + \varepsilon_0\vec{E}$
  $\vec{D} = \varepsilon_0(1+\chi_E)\vec{E} = \varepsilon\vec{E}$
- $Q = CV$
- $U_E = \left[\frac{1}{2}\right]\sum_i q_i\,\phi_i$
- $u_E = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$
  $U_E = \int_V u_E dv$
- $\vec{F}_s = \pm\frac{dU_E}{ds}\vec{u}_s$

Corrente eléctrica estacionária

- $\vec{J} = Nq\vec{v}$
- $\vec{J} = \sigma_c\vec{E}$
- $I = \int_S \vec{J}\cdot\vec{n}\,dS$
- $p = \vec{J}\cdot\vec{E}$
- $\oint_S \vec{J}\cdot\vec{n}\,dS = -\frac{d}{dt}\int_V \rho dv$
  $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\frac{d\rho}{dt}$

Ondas electromagnéticas

- $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$
- $\vec{n} = \frac{\vec{\kappa}}{\kappa} = \frac{\vec{E}}{E}\times\frac{\vec{B}}{B}$
- $\frac{E}{B} = v$
- $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$
- $u = u_E + u_M$
- $I = \left\langle\vec{S}\cdot\vec{n}\right\rangle$

Magnetostática

- $\vec{B} = \int_\Gamma \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{\ell}\times\vec{u}_r}{r^2}$
  $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}H/m$
- $d\vec{F} = Id\vec{\ell}\times\vec{B}$
- $\oint_S \vec{B}\cdot\vec{n}\,dS = 0$
  $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$
- $\oint_\Gamma \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J}\cdot\vec{n}\,dS$
  $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}$
- $\vec{B} = \mu_0(\vec{M}+\vec{H})$
  $\vec{B} = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H} = \mu\vec{H}$
- $\oint_\Gamma \vec{M}\cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J}_M\cdot\vec{n}\,dS$
  $\vec{J}_M = \vec{\nabla}\times\vec{M}$
  $\vec{J}'_M = \vec{M}\times\vec{n}_{ext}$

Interacção de partículas e campos

- $\vec{F} = q\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)$

Campos variáveis e indução

- $\oint_\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\vec{n}\,dS$
  $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
- $\Phi_i = L_iI_i + M_{ij}I_j$
- $U_M = \left[\frac{1}{2}\right]\sum_i \Phi_i I_i$
- $u_M = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}$
  $U_M = \int_V u_M dv$
- $\vec{F}_s = \pm\frac{dU_M}{ds}\vec{u}_s$
- $\oint_\Gamma \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J}\cdot\vec{n}\,dS + \frac{d}{dt}\int_S \vec{D}\cdot\vec{n}\,dS$
  $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

Óptica

- $n_1 sen\theta_1 = n_2 sen\theta_2$
- $tg\theta_B = \frac{n_2}{n_1}$
  interferência entre fendas
- $dsen\theta_{max} = m\lambda$
- $dsen\theta_{min} = m\lambda + \frac{\lambda}{m'}$ ($m' \leq N$ e par)
  difracção
- $asen\theta_{min} = m\lambda$

Algumas Primitivas

$$\int \frac{dx}{(x^2+b)^{3/2}} = \frac{1}{b}\frac{x}{\sqrt{x^2+b}} \qquad \int \frac{xdx}{(x^2+b)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+b}}$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+b}} = \sqrt{x^2+b} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+b}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x(x+a)} = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{x}{x+a}\right)$$

Para o cálculo analítico de integrais pode ser consultado o endereço web: http://integrals.wolfram.com

Coordenadas cartesianas (x, y, z)

$$d\vec{\ell} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{u}_z$$
$$dS = dx\,dy$$
$$dV = dx\,dy\,dz$$
$$\vec{\nabla}F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z},\right) \times (A_x, A_y, A_z)$$

Coordenadas polares (r, θ)

$$d\vec{\ell} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta$$
$$dS = r\,dr\,d\theta$$

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

$$d\vec{\ell} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + dz\,\vec{u}_z$$
$$dV = r\,dr\,d\theta\,dz$$
$$\vec{\nabla}F = \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\,A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\,A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_z$$

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

$$d\vec{\ell} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + r\,sen\theta\,d\phi\,\vec{u}_\phi$$
$$dV = r^2\,dr\,sen\theta\,d\theta\,d\phi$$
$$\vec{\nabla}F = \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial F}{\partial \phi}\right)$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen\theta A_\theta\right) + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(A_\phi\right)$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left[\frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial(sen\theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial(sen\theta A_\theta)}{\partial \phi}\right]\vec{u}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{sen\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right]\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\vec{u}_\phi$$

Teorema da Divergência

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dV = \oint_S \vec{A}\cdot\vec{n}\,dS$$

Teorema da Stokes

$$\int_S \vec{\nabla}\times\vec{A}\,dS = \oint_\Gamma \vec{A}\cdot d\vec{\ell}$$

Identidades vectoriais

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$
$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0$$
$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$$