

2^o Exame

28 de Junho de 2012: 11H30

Duração do exame: 2H30

Mestrado em Eng. Electrotécnica e de Computadores (MEEC)

Electromagnetismo e Óptica

2^o semestre de 2011-2012

Prof. Fernando Barão (Responsável)

Prof. Amaro Rica da Silva

Prof. Filipe Mendes

Avisos:

- Durante a realização do teste/exame não é permitido o uso de telemóveis e calculadoras.
- Identifique claramente todas as folhas do teste/exame.
- Inicie a resolução de cada um dos grupo numa nova página.
- Realize sempre em primeiro lugar os cálculos analíticos e só no final substitua pelos valores numéricos.

	30°	45°	60°
sen	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
cos	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2

Problema 1:

Resolva as seguintes alíneas explicando claramente os seus cálculos.

- [1,0] a) Determine o campo eléctrico produzido por uma distribuição linear de carga de densidade λ C/m distribuída ao longo do eixo dos zz .

Resolução

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \vec{e}_r$$

- [0,5] b) Determine a energia do sistema de duas cargas positivas $+q$ separadas de uma distância a .

Resolução

A energia do sistema corresponde ao trabalho necessário para o constituir; isto é, o trabalho realizado para trazer a segunda carga desde ∞ contra o campo eléctrico da primeira:

$$U = -q \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -q \int_{\infty}^P \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2}$$

- [1,0] c) Determine o trabalho realizado para transportar uma carga $+q$ do ponto A ao ponto B quando submetida a um campo eléctrico uniforme $\vec{E} = E_0 \vec{e}_x$, pelo caminho indicado na figura 1.1.

Resolução

$$W = - \int_A^B q \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -q E_0 (x_B - x_A)$$

- [0,5] d) Determine a expressão da força sobre uma carga eléctrica $+q$ que possui uma velocidade $v = v_0 \vec{e}_x$ e está sujeita aos campos eléctrico $\vec{E} = E_0 \vec{e}_x$ e magnético $\vec{B} = B_0 \vec{e}_x$.

Resolução

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = q\vec{E} = qE_0 \vec{e}_x$$

uma vez que \vec{v} e \vec{B} são colineares, e portanto o produto externo é nulo.

- [1,0] e) Determine o campo magnético produzido pelo circuito que transporta a corrente I , no centro da semi-espira (fig. 1.2).

Resolução

O campo magnético no ponto central da semi-espira só tem contribuição desta uma vez que os fios rectilíneos contribuem com um campo nulo.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{\ell} \times \vec{e}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{R d\theta}{R^2} \vec{e}_z = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\theta}{R} \vec{e}_z$$

$$\vec{B} = \int_0^\pi \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\theta}{R} \vec{e}_z = \frac{\mu_0}{4} \frac{I}{R} \vec{e}_z$$

- [0,5] f) Determine a força entre o circuito que transporta a corrente I e o um fio condutor percorrido por uma corrente I_c ao longo de zz e que passa no centro da semi-espira (fig 1.3).

Resolução

A força de Laplace, $d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$ sobre o fio de corrente, é nula uma vez que $d\vec{\ell}$ é colinear com \vec{B} .

- [1,0] g) Admita que se representa a Terra por um plano condutor. Determine a densidade de carga existente na Terra sabendo que o campo eléctrico junto à sua superfície é vertical e dado por $\vec{E} = -100 \vec{e}_z$ [V/m].

Resolução

Da aplicação da lei de Gauss a um cilindro de secção ΔS tem-se:

$$-\varepsilon_0 E \Delta S = \sigma \Delta S \Rightarrow \sigma = -\varepsilon_0 E = -\frac{1}{36\pi 10^7} \text{ C/m}^2$$

- [0,5] h) Um condensador carregado apresenta um campo eléctrico uniforme entre as armaduras circulares, $\vec{E} = E_0 \vec{e}_z$. Determine, justificando, o fluxo do vector de Poynting (\vec{S}) que atravessa o volume cilíndrico definido pelas armaduras do condensador.

Resolução

O vector de Poynting \vec{S} é nulo umavez que o campo magnético no interior do condensador é nulo.

- [0,5] i) Um condutor cilíndrico cuja condutividade eléctrica é $\sigma_c = 10^8 \text{ S/m}$ encontra-se ligado a uma bateria. Sabendo que a densidade de potência fornecida pela bateria ao condutor é de 1 mW/m^3 , determine o campo eléctrico existente no condutor.

Resolução

A densidade de potência:

$$p = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma_c E^2 \Rightarrow E = \sqrt{\frac{p}{\sigma_c}} = 10^{-6} \sqrt{10} \text{ V/m}$$

- [0,5] j) Uma onda monocromática de frequência angular $\omega_0 = 10^{15} \text{ rad/s}$ e polarização linear propaga-se no ar. Sabendo que as frentes de onda são paralelas ao plano xy e que a direcção do campo eléctrico faz um ângulo de 30° com o eixo dos yy , escreva a expressão do campo eléctrico associado à onda electromagnética.

Resolução

$$\vec{E} = E_0 \left(\frac{1}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_y \right) \sin \left(\omega_0 t - \frac{\omega_0}{c} z \right)$$

- [1,0] k) Um feixe de ondas electromagnéticas monocromáticas e polarizadas circularmente de intensidade $\frac{1}{0,6\pi} \text{ W/m}^2$, propaga-se num meio dieléctrico de índice de refração $n = 2$. Determine a amplitude do campo eléctrico associado às ondas.

Resolução

$$\langle |\vec{S}| \rangle = v \varepsilon \langle E^2 \rangle$$

Polarização circular: $\langle E^2 \rangle = E_0^2$

velocidade da onda: $v = c/n = c/2$

permissividade eléctrica do meio: $c/v = 2 = \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0} \Rightarrow \varepsilon = 4\varepsilon_0$

$$E_0^2 = \frac{\langle S \rangle}{v \varepsilon} = \frac{2,9 \pi 10^9}{0,6 \pi 3 10^8} = 10^2 \Rightarrow E_0 = 10 \text{ V/m}$$

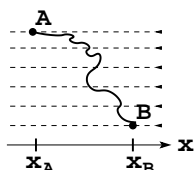


Figura 1.1



Figura 1.2

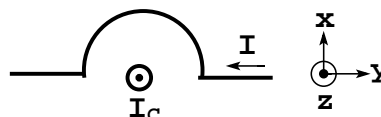


Figura 1.3

Problema 2:

Considere uma película metálica de espessura desprezável que pode ser aproximada por um plano infinito para efeitos de cálculos. A película está carregada com uma densidade de carga positiva $\sigma_1 = \sigma$ [C/m²].

- [1,0] a) Determine o campo eléctrico criado pelo plano infinito.

Resolução

O plano infinito é uma das geometrias em que se pode aplicar a lei de Gauss de uma forma simples. Escolhe-se para superfície gaussiana uma superfície cilíndrica que atravessa o plano, ficando com cada uma das "tampas" de um dos lados do plano. Designando por S a área de cada uma dessas "tampas":

$$\int \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot 2S = \frac{\sigma_1 S}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x \quad x > 0$$

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x \quad x < 0$$

- [1,0] b) Determine a expressão do potencial eléctrico criado pelo plano infinito tomando como ponto de referência a origem do referencial (0,0). Represente-o graficamente.

Resolução

$$\phi = \int_P^{ref} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_x^{x_{ref}} E \cdot dx$$

$$x > 0: \phi = \int_x^0 \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dx = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} x$$

$$x < 0: \phi = \int_x^0 -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} dx = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x$$

Uma segunda película metálica que também pode ser aproximada por um plano infinito é colocada paralelamente à primeira, a uma distância d (ver figura). Esta segunda película tem uma densidade de carga positiva $\sigma_2 = 3\sigma$.

- [1,0] c) Determine o campo eléctrico criado pelo conjunto das duas placas em todo o espaço ($x < 0$; $0 < x < d$; $x > d$).

Resolução

Como já conhecemos o campo criado por um plano infinito podemos usar o princípio da sobreposição para determinar o campo criado por dois planos infinitos, cada um com a sua densidade de carga: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

$$x < 0: \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x - \frac{3\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x = -\frac{2\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x$$

$$0 < x < d: \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x - \frac{3\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x$$

$$x > d: \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x + \frac{3\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x = \frac{2\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x$$

As duas películas metálicas são colocadas sobre duas placas também metálicas formando cada par placa+película um único condutor (as cargas iniciais das películas podem deslocar-se livremente).

- [1,0] d) Determine a capacidade do sistema por unidade de área.

Resolução

A capacidade do sistema é independente da carga que lá exista. Vamos pois considerar que a densidade de carga da face interior armadura que está em $x = 0$ é σ' . Pela lei de Gauss é fácil verificar que a carga na face interior da outra armadura será simétrica, $-\sigma'$. Usando novamente o princípio da sobreposição constatamos que o campo no interior do condensador será $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x$. A diferença de potencial entre as

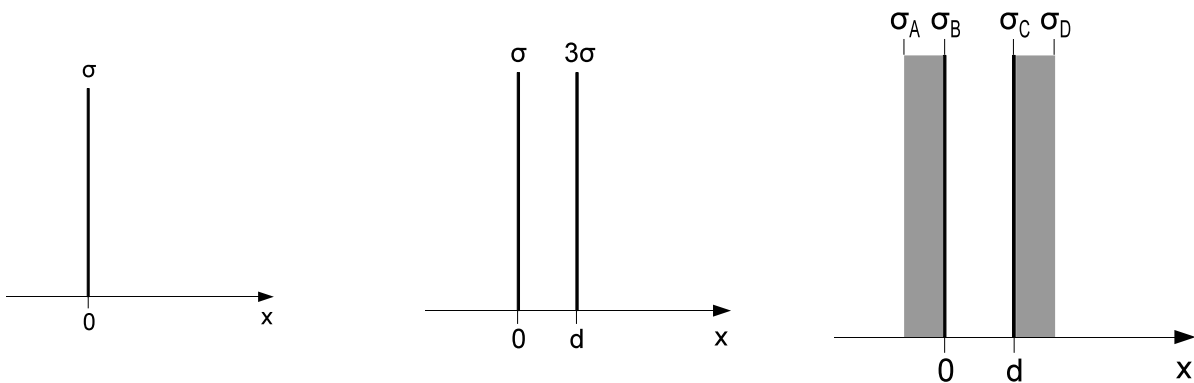
armaduras será então: $V = \int_0^d \frac{\sigma}{\epsilon_0} dx = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$ A capacidade por unidade de área será pois: $C' = \frac{C}{A} = \frac{\sigma'}{V} = \frac{\epsilon_0}{d}$

- [1,5] e) Determine a distribuição final de densidades de carga em cada uma das faces das duas placas, $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$ e σ_D (ver figura).

Sugestão: lembre-se do valor do campo eléctrico dentro de um condutor em regime electrostático e utilize de uma forma simples a lei de Gauss e/ou o princípio da sobreposição.

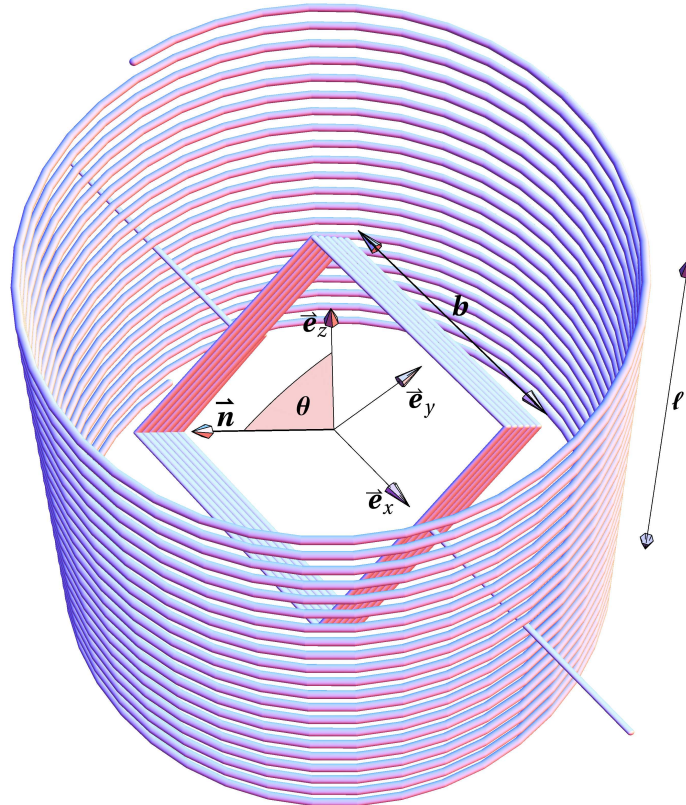
Resolução

Como vimos anteriormente, as cargas nas faces interiores das armaduras são necessariamente simétricas: $\sigma_B + \sigma_C = 0$ usando o princípio da sobreposição no interior da armadura localizada em $x = d$, lembrando que o campo tem de ser nulo e notando que os campos são todos igualmente proporcionais às densidades de carga, podemos escrever: $\vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C + \vec{E}_D = 0$ $\sigma_A - \sigma_B - \sigma_C - \sigma_D = 0$ Estas duas equações permitem-nos escrever: $\sigma_B = -\sigma_C$, $\sigma_A = \sigma_D$ como conhecemos a carga total das armaduras: $\sigma_A + \sigma_B = \sigma$, $\sigma_C + \sigma_D = 3\sigma$ Podemos resolver o sistema e obtemos: $\sigma_A = 2\sigma$, $\sigma_B = -\sigma$, $\sigma_C = \sigma$, $\sigma_D = 2\sigma$



Problema 3:

Uma bobina com o eixo segundo \vec{e}_z , de comprimento ℓ e raio $a \ll \ell$, é percorrida por uma corrente I_1 e tem n_1 espiras por unidade de comprimento. No seu interior existe um enrolamento formado por N_2 espiras quadradas de lado b , altura desprezável e coeficiente de auto-indução L_2 , que pode rodar em torno de um eixo \vec{e}_x perpendicular ao eixo da bobina exterior. Este enrolamento interior está ligado a uma fonte de corrente I_2 .

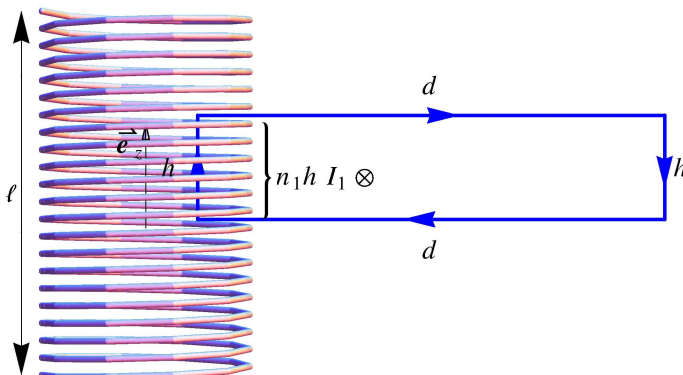


- [0,5] a) Determine o campo \vec{B}_1 produzido pela bobina exterior, em todo o espaço.

Resolução

A bobina tem n_1 espiras por unidade de comprimento, ou $N_1 = n_1 \ell$ espiras no total. Na hipótese de se ter $\ell \gg a$ um percurso rectangular γ de largura $h \ll \ell$ e comprimento $d \gg \ell$ permite concluir, por aplicação da lei de Ampère:

$$\oint_{\gamma} \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{int}(\gamma) = \mu_0 n_1 h I_1 = B_z h$$



Assumindo que o campo \vec{B}_1 é invariante para pequenas translações na direcção \vec{e}_z , e que à distância d do eixo da bobina já é praticamente desprezável, então a circulação de \vec{B}_1 nos lados horizontais de γ tem sinais opostos e soma zero, e a circulação de \vec{B}_1 nos lados verticais de γ reduz-se a $B_z h$ no lado interior à bobina. O número de espiras envolvidas pelo percurso γ é $n_1 h$ e se cada espira tem corrente I_1 então a corrente total a atravessar o percurso é $I_{int}(\gamma) = n_1 h I_1$. Assim, para $r \ll a$, ou seja para pontos interiores à bobina mas não muito perto das espiras, o campo magnético deve ser dado por

$$\vec{B}_1(r \ll a) = B_{1z} \vec{e}_z = \mu_0 n_1 I_1 \vec{e}_z$$

No caso de escolhermos $I_1 > 0$ no sentido retrógrado em relação a \vec{e}_z , então

$$\vec{B}_1(r \ll a) = B_{1z} \vec{e}_z = -\mu_0 n_1 I_1 \vec{e}_z$$

- [1,0] b) Determine o coeficiente de auto-indução L_1 da bobina exterior.

Resolução

O fluxo total através da bobina é

$$\Phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12} = L_1 I_1 + M I_2$$

Para determinar o coeficiente de auto-indução L_1 basta calcular o auto-fluxo de \vec{B}_1 através da bobina. Devido ao enrolamento de $N_1 = n_1 \ell$ espiras, este fluxo será N_1 vezes o fluxo de \vec{B}_1 através da secção recta S_b da bobina:

$$\phi_{11} = N_1 \iint_{S_b} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_b = N_1 B_{1z} \pi a^2 = L_1 I_1$$

$$L_1 = \mu_0 n_1 N_1 \pi a^2 = \mu_0 \frac{N_1^2}{\ell} \pi a^2$$

- [1,0] c) Determine o coeficiente de indução mútua M do sistema bobina-enrolamento interior (em função do ângulo θ com \vec{e}_z).

Resolução

O coeficiente de indução mútua M pode ser determinado calculando o fluxo ϕ_{21} de \vec{B}_1 através da secção S_e do enrolamento interior, já que o fluxo total no enrolamento será

$$\Phi_2 = \phi_{21} + \phi_{22} = M I_1 + L_2 I_2$$

$$\phi_{21} = N_2 \iint_{S_e} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_e = N_2 B_{1z} b^2 \cos(\theta) = M I_1$$

$$M = \mu_0 n_1 N_2 b^2 \cos(\theta) = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell} b^2 \cos(\theta)$$

- [1,0] d) Determine a energia magnética U armazenada pelo sistema bobina-enrolamento interior.

Resolução

A energia magnética armazenada pelo sistema pode ser escrita em termos das correntes e coeficientes de indução como

$$U_m = \frac{1}{2} (\Phi_1 I_1 + \Phi_2 I_2) = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

$$U_m = \frac{1}{2} \mu_0 a^2 \frac{N_1^2}{\ell} \pi I_1^2 + \mu_0 b^2 \frac{N_1 N_2}{\ell} \cos(\theta) I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

[1,0] e) Determine a força que actua em cada um dos lados do enrolamento interior.

Resolução

Cada segmento de corrente $I_2 d\vec{r}_e$ nas espiras do enrolamento interior sofre uma força de Lorentz $d\vec{F} = I_2 d\vec{r}_e \times \vec{B}_1$ causada pelo campo \vec{B}_1 . Este campo é contudo constante, pelo que para os lados (1) e (3) do enrolamento, paralelos a \vec{e}_x ,

$$\vec{F}_1 = -N_2 I_2 b \vec{e}_x \times B_{1z} \vec{e}_z = \mu_0 b \frac{N_1 N_2}{\ell} I_1 I_2 \vec{e}_y = -\vec{F}_3$$

Para os lados (2) e (4) do enrolamento, perpendiculares a \vec{e}_x , teríamos por outro lado

$$\begin{aligned} \vec{F}_2 &= -N_2 I_2 b (\cos(\theta) \vec{e}_y + \sin(\theta) \vec{e}_z) \times B_{1z} \vec{e}_z = \\ &= -\mu_0 b \frac{N_1 N_2}{\ell} I_1 I_2 \cos(\theta) \vec{e}_x = -\vec{F}_4 \end{aligned}$$

[1,0] f) Determine o binário (momento de Força) $\vec{N}(\theta)$ que actua o enrolamento interior.

Resolução

A energia magnética sendo

$$\mathcal{U}_m(\theta) = \frac{1}{2} (L_1 I_1^2 + 2 M(\theta) I_1 I_2 + L_2 I_2^2) \quad (1)$$

O momento destas forças em relação ao centro do enrolamento é dado por

$$\vec{N}_o = \frac{\partial \mathcal{U}_m(\theta)}{\partial \theta} \vec{e}_x = -\mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell} b^2 \sin(\theta) I_1 I_2 \vec{e}_x$$

Note-se que se designarmos por $\vec{M}_2 = N_2 I_2 b^2 \vec{n}$ o momento magnético do enrolamento interno, o binário a que fica sujeito quando imerso no campo $\vec{B}_1 = \mu_0 n_1 I_1 \vec{e}_z$ é precisamente

$$\vec{N}_o = \vec{M}_2 \times \vec{B}_1$$

Admita agora que o enrolamento de espiras interior à bobina roda com velocidade angular ω .

[1,0] g) Determine a força electromotriz ε a que o enrolamento fica submetido.

Resolução

Quando o enrolamento roda com velocidade angular $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, o fluxo de \vec{B}_1 no enrolamento varia, o que pela Lei de Faraday dá origem a uma força electromotriz

$$\varepsilon_{im} = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -\frac{d}{dt} (M I_1 + L_2 I_2) = -\frac{dM}{dt} I_1$$

Mas vimos acima que $M(\theta) = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell} b^2 \cos(\theta)$ pelo que

$$\varepsilon_{im} = -\mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell} b^2 \frac{d \cos(\theta(t))}{dt} I_1 = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell} b^2 \omega \sin(\theta(t)) I_1$$

Electrostática

- $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$
- $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ N.m}^2.\text{C}^{-2}$
- $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$
 $\nabla \times \vec{E} = 0$
- $\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = \int_V \rho_{liv} dv$
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{liv}$
- $\oint_S \vec{P} \cdot \vec{n} dS = - \int_V \rho_{pol} dv$
 $\rho_{pol} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$
 $\sigma_{pol} = \vec{P} \cdot \vec{n}_{ext}$
- $\phi_P = \int_P^{Ref} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$
 $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$
- $\vec{D} = \vec{P} + \epsilon_0 \vec{E}$
 $\vec{D} = \epsilon_0(1 + \chi_E) \vec{E} = \epsilon \vec{E}$
- $Q = CV$
- $U_E = \left[\frac{1}{2} \right] \sum_i q_i \phi_i$
- $u_E = \frac{1}{2} \epsilon E^2$
 $U_E = \int_V u_E dv$
- $\vec{F}_s = \pm \frac{dU_E}{ds} \vec{u}_s$

Corrente eléctrica estacionária

- $\vec{J} = Nq\vec{v}$
- $\vec{J} = \sigma_c \vec{E}$
- $I = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS$
- $p = \vec{J} \cdot \vec{E}$
- $\oint_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS = - \frac{d}{dt} \int_V \rho dv$
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \frac{d\rho}{dt}$

Ondas electromagnéticas

- $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$
- $\vec{n} = \frac{\vec{\kappa}}{\kappa} = \frac{\vec{E}}{E} \times \frac{\vec{B}}{B}$
- $\frac{E}{B} = v$
- $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$
- $u = u_E + u_M$
- $I = \langle \vec{S} \cdot \vec{n} \rangle$

Magnetostática

- $\vec{B} = \int_{\Gamma} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{\ell} \times \vec{u}_r}{r^2}$
 $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ H/m}$
- $d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}$
- $\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0$
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
- $\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS$
 $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$
- $\vec{B} = \mu_0(\vec{M} + \vec{H})$
 $\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H}$
- $\oint_{\Gamma} \vec{M} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J}_M \cdot \vec{n} dS$
 $\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}$
 $\vec{J}'_M = \vec{M} \times \vec{n}_{ext}$

Interação de partículas e campos

- $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

Campos variáveis e indução

- $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$
 $\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- $\Phi_i = L_i I_i + M_{ij} I_j$
- $U_M = \left[\frac{1}{2} \right] \sum_i \Phi_i I_i$
- $u_M = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$
 $U_M = \int_V u_M dv$
- $\vec{F}_s = \pm \frac{dU_M}{ds} \vec{u}_s$
- $\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS$
 $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Óptica

- $n_1 \text{sen}\theta_1 = n_2 \text{sen}\theta_2$
- $\text{tg}\theta_B = \frac{n_2}{n_1}$
interferência entre fendas
- $d \text{sen}\theta_{max} = m\lambda$
- $d \text{sen}\theta_{min} = m\lambda + \frac{\lambda}{m'}$ ($m' \leq N$ e par)
difracção
- $a \text{sen}\theta_{min} = m\lambda$

Algumas Primitivas

$$\int \frac{dx}{(x^2 + b)^{3/2}} = \frac{1}{b} \frac{x}{\sqrt{x^2 + b}}$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + b}} = \sqrt{x^2 + b}$$

$$\int \frac{dx}{x(x+a)} = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{x}{x+a}\right)$$

$$\int \frac{xdx}{(x^2 + b)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + b}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + b})$$

Para o cálculo analítico de integrais pode ser consultado o endereço web: <http://integrals.wolfram.com>

Coordenadas cartesianas (x, y, z)

$$d\vec{\ell} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$$

$$dS = dx dy$$

$$dV = dx dy dz$$

$$\vec{\nabla} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (A_x, A_y, A_z)$$

Coordenadas polares (r, θ)

$$d\vec{\ell} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta$$

$$dS = r dr d\theta$$

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

$$d\vec{\ell} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

$$dV = r dr d\theta dz$$

$$\vec{\nabla} F = \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

Coordenadas esféricas (r, θ, φ)

$$d\vec{\ell} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \operatorname{sen}\theta d\phi \vec{u}_\phi$$

$$dV = r^2 dr \operatorname{sen}\theta d\theta d\phi$$

$$\vec{\nabla} F = \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial F}{\partial \phi} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\operatorname{sen}\theta A_\theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (A_\phi)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left[\frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial(\operatorname{sen}\theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial(\operatorname{sen}\theta A_\theta)}{\partial \phi} \right] \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} \right] \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{u}_\phi$$

Teorema da Divergência

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

Teorema da Stokes

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{A} dS = \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

Identidades vectoriais

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$