1° Teste de EO

16 de Novembro de 2012
18H00
Duração: 1H30

Electromagnetismo e Óptica

Mestrado em Eng. Electrotécnica e Computadores (MEEC)
1° semestre de 2012-2013

Prof. Jorge Romão
Prof. Amaro Rica da Silva
Prof[a]. Raquel Crespo
Assist. João Pedro Canhoto

- Durante a realização do teste não é permitido o uso de telemóveis e calculadoras.
- Identifique claramente todas as folhas do teste.
- Inicie a resolução de cada um dos problemas numa nova página.

Problema 1.

Considere o sistema representado na Figura 1, constituído por dois condutores maciços em equilíbrio eletrostático. O condutor interior está compreendido entre as superfícies esféricas de raios $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ e condutor exterior entre as superfícies esféricas de raios $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{d}$. Na cavidade do condutor interior existe o vazio e o espaço entre os dois condutores está preenchido por um dielétrico linear, homogéneo e isótropo de permitividade $\boldsymbol{\epsilon}$. O condutor interior tem uma carga total $\boldsymbol{-Q}$ enquanto que a carga total no condutor exterior é $\boldsymbol{2Q}$ ($\boldsymbol{Q > 0}$).

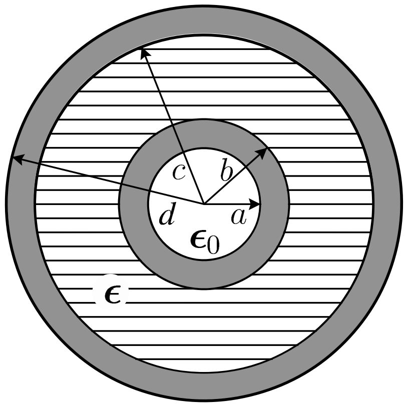

Figura 1

[2.0] **a)** Determine a carga total nas superfícies interior e exterior de cada um dos condutores. Justifique a resposta.

R: Como o campo elétrico $\vec{E}$ é zero dentro dos condutores, o fluxo de $\vec{E}$ (ou $\vec{D} = \varepsilon_o \vec{E}$) através de qualquer superfície de Gauss S **que permaneça no interior das esferas condutoras** é necessariamente zero, e pela Lei de Gauss $\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{int}$, a soma Q_{int} das cargas livres interiores a S deve ser também zero.

Em condutores em equilíbrio eletrostático toda a carga livre deve encontrar-se à superfície dos condutores. Assim, se no condutor interior a carga total é $Q_a + Q_b = -Q$, usando uma superfície de gauss S_i, cujos pontos estão a uma distância $r_s \in [a, b]$ do centro, concluímos que na sua superfície interna $Q_{int} = Q_a = 0$, donde $Q_b = -Q$ na sua superfície externa.

No condutor exterior a carga total é $Q_c + Q_d = 2Q$. Usando uma superfície de gauss S_e, cujos pontos estão a uma distância $r_s \in [c, d]$ do centro, concluímos de $Q_{int} = Q_b + Q_c = 0$ que na superfície interna $Q_c = -Q_b = Q$, donde $Q_d = 2Q - Q_c = Q$ na sua superfície externa. Em resumo:

$$\begin{cases} Q_a = 0 \\ Q_b = -Q \\ Q_c = +Q \\ Q_d = +Q \end{cases} \tag{1}$$

[2.0] **b)** Determine, detalhando todos os cálculos efetuados, a expressão do vector $\vec{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{r})$ em todo o espaço ($\boldsymbol{r < a,\ a < r < b,\ b < r < c,\ c < r < d,\ r > d}$).

R: Usando agora a lei de Gauss para superfícies esféricas S_r de raio r apropriado para cada região, obtemos usando a simetria esférica da distribuição de cargas e a invariância em S_r da componente radial $D_r(r)$ de $\vec{\boldsymbol{D}}$

$$\iint_{S_r} \vec{\boldsymbol{D}}\cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = D_r(r)\, 4\pi r^2 = Q_{int} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \vec{\boldsymbol{D}} = 0 & 0 < r < a \\ \vec{\boldsymbol{D}} = 0 & a < r < b \\ \vec{\boldsymbol{D}} = -\dfrac{Q}{4\pi r^2}\vec{\boldsymbol{e}}_r & b \le r \le c \\ \vec{\boldsymbol{D}} = 0 & c < r < d \\ \vec{\boldsymbol{D}} = \dfrac{Q}{4\pi r^2}\vec{\boldsymbol{e}}_r & d \le r < \infty \end{cases} \tag{2}$$

no referencial $\left\{\vec{\boldsymbol{e}}_r, \vec{\boldsymbol{e}}_\theta, \vec{\boldsymbol{e}}_\varphi\right\}$ associado às coordenadas esféricas $\{r, \theta, \varphi\}$.

[2.0] **c)** Determine, detalhando todos os cálculos, a expressão do potencial elétrico em todas as regiões do espaço, tomando como referência $\boldsymbol{\phi(\infty) = 0}$.

R: Como $\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{D}}}{\varepsilon}$ ou $\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{D}}}{\varepsilon_o}$ (dependendo da presença ou não de um meio dielétrico), e dentro dos condutores em equilíbrio o potencial ϕ é constante, então podemos usar a expressão

$$\phi(r) = \phi\left(r_o\right) - \int_{r_o \to r} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \phi\left(r_o\right) - \int_{r_o}^{r} E_r(r)\, dr \tag{3}$$

para calcular

$$\begin{cases} \phi(r) = -\displaystyle\int_{\infty}^{r} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r^2}dr & = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{1}{r} & d < r < \infty \\ \phi(r) = \phi(d) = \phi(c) & = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{1}{d} & c \le r \le d \\ \phi(r) = \phi(c) - \displaystyle\int_{c}^{r}\left(-\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^2}\right)dr & = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{1}{d} + \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{r}\right) & b < r < c \\ \phi(r) = \phi(b) = \phi(a) & = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{1}{d} + \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{b}\right) & 0 < r < b \end{cases} \tag{4}$$

[2.0] **d)** Determine as densidades de carga de polarização nas duas superfícies do dielétrico, $\boldsymbol{\sigma'(b)}$, $\boldsymbol{\sigma'(c)}$ e a densidade de carga de polarização em volume $\boldsymbol{\rho'}$.

R: Dentro do dielétrico não existem cargas livres, o que significa que aí $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}} = 0$. Como no dielétrico $\vec{\boldsymbol{P}} = \varepsilon_o\chi_e\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{\varepsilon_o\chi_e}{\varepsilon}\vec{\boldsymbol{D}}$ obtemos imediatamente que para $b < r < c$,

$$\rho'(r) = -\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{P}} = -\frac{\varepsilon_o\chi_e}{\varepsilon}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}} = 0 \tag{5}$$

Na superfície interior do dielétrico, para $r = b$, temos $\vec{\boldsymbol{n}}_{ext}(b) = -\vec{\boldsymbol{e}}_r$, enquanto na superfície exterior do dielétrico $\vec{\boldsymbol{n}}_{ext}(c) = \vec{\boldsymbol{e}}_r$. Assim, relembrando que $\varepsilon_o\chi_e = \varepsilon - \varepsilon_o$

$$\begin{cases} \sigma'(b) = \vec{\boldsymbol{P}}(b)\cdot\vec{\boldsymbol{n}}_{ext}(b) = \dfrac{\varepsilon - \varepsilon_o}{\varepsilon}\dfrac{Q}{4\pi b^2} \\ \sigma'(c) = \vec{\boldsymbol{P}}(c)\cdot\vec{\boldsymbol{n}}_{ext}(c) = -\dfrac{\varepsilon - \varepsilon_o}{\varepsilon}\dfrac{Q}{4\pi c^2} \end{cases} \tag{6}$$

[2.0] **e)** Determine a energia eletrostática do sistema.

R: A energia eletrostática pode ser calculada para um sistema de condutores com cargas Q_i a potenciais ϕ_i como $U = \frac{1}{2}\sum_i Q_i\phi_i$ ou seja

$$U = \frac{1}{2}\left(Q_b\phi(b) + \left(Q_c + Q_d\right)\phi(c)\right) = \frac{1}{2}\left(-Q\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{d} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)\right) + 2Q\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{d}\right)\right) \tag{7}$$

ou

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_o}\frac{1}{d} \tag{8}$$

Outra forma de determinar a energia eletrostática é avaliar a energia armazenada no campo em todo o espaço, com densidade de energia local $w_e = \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{E}}\cdot\vec{\boldsymbol{D}}$.

Dentro do dielétrico $\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{\varepsilon}\vec{\boldsymbol{D}}$:

$$U_i = \iiint_{r\in[b,c]} \frac{1}{2\varepsilon}|\vec{\boldsymbol{D}}|^2\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_b^c \frac{1}{2\varepsilon}\left(-\frac{Q}{4\pi r^2}\right)^2 r^2\,\sin(\theta)\,dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon}\frac{Q^2}{(4\pi)^2}4\pi\int_b^c \frac{1}{r^2}\,dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) \tag{9}$$

enquanto no espaço exterior às esferas $\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{\varepsilon_o}\vec{\boldsymbol{D}}$

$$U_e = \iiint_{r\in[d,\infty]} \frac{1}{2\varepsilon_o}|\vec{\boldsymbol{D}}|^2\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_d^{\infty} \frac{1}{2\varepsilon_o}\left(\frac{Q}{4\pi r^2}\right)^2 r^2\,\sin(\theta)\,dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon_o}\frac{Q^2}{(4\pi)^2}4\pi\int_d^{\infty} \frac{1}{r^2}\,dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_o}\frac{1}{d} \tag{10}$$

A soma destes dois termos dá a energia total $U_i + U_e = U$ tal como anteriormente determinada.

Uma terceira via consiste em olhar para o sistema como dois condensadores em série, um com armaduras em b e c com carga Q, e o outro com armaduras em d e ∞, também com carga Q. A energia armazenada num condensador é $U_c = \frac{1}{2}Q\mathcal{V}$, onde $\mathcal{V}$ é a tensão entre as armaduras. Assim, para o primeiro condensador

$$\mathcal{V}_1 = \phi(c) - \phi(b) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) \qquad\Longrightarrow\qquad U_{c_1} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) \tag{11}$$

enquanto no segundo

$$\mathcal{V}_2 = \phi(d) - \phi(\infty) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{d} \qquad\Longrightarrow\qquad U_{c_2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_o}\frac{1}{d} \tag{12}$$

e portando $U_{c_1} + U_{c_2} = U$ como anteriormente.

Problema 2.

Um tubo condutor cilíndrico oco de diâmetro d, espessura a e comprimento $L \gg d$, é percorrido por uma corrente I resultante de uma tensão $\mathcal{V}$ aplicada entre as suas extremidades (Figura 2). Sabendo que a sua condutividade é σ_c e a permeabilidade magnética é μ,

[2.0] **a)** Determine a resistência total R do tubo, e a densidade de corrente de condução $\vec{J}$ no tubo.

R: Pela definição de resistência $R = \dfrac{L}{\sigma_c S}$ para um condutor de secção constante S (secção perpendicular à direcção da corrente) e comprimento L, temos neste caso

$$R = \frac{1}{\sigma_c} \frac{L}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \pi \left(\frac{d}{2} - a\right)^2} = \frac{1}{\sigma_c} \frac{L}{\pi\, a\,(d-a)} \tag{13}$$

$$J = \frac{I}{S} = \frac{\mathcal{V}}{R\,S} = \frac{\sigma_c \mathcal{V}}{L} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{J}} = \frac{\sigma_c \mathcal{V}}{L} \vec{\boldsymbol{u}}_z \tag{14}$$

(Se não resolver a alínea a) apresente os resultados das alíneas seguintes em função de I.)

[3.0] **b)** Na aproximação de um condutor retilíneo infinito, escreva as expressões para o campo $\vec{\boldsymbol{B}}$ em todas as regiões na vizinhança e dentro do tubo (Figura 2). Explique os seus resultados.

R: Pela Lei de Ampére, dentro do tubo para $r < \dfrac{d}{2} - a$ tem-se $\vec{\boldsymbol{H}} \equiv 0$, e para $\dfrac{d}{2} - a < r < \dfrac{d}{2}$, tem-se

$$\oint_{\partial S} \vec{\boldsymbol{H}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = I_{int}^{cond} \quad \Longrightarrow \quad H_\theta(r)\, 2\pi\, r = \iint_S \vec{\boldsymbol{J}} \cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = \frac{\sigma_c \mathcal{V}}{L} \pi (r^2 - (\frac{d}{2} - a)^2)$$

portanto em coordenadas cilíndricas,

$$\vec{\boldsymbol{H}} = H_\theta(r)\, \vec{\boldsymbol{u}}_\theta(\theta) = \frac{\sigma_c \mathcal{V}}{2L} \frac{\left(r^2 - (\frac{d}{2} - a)^2\right)}{r} \vec{\boldsymbol{u}}_\theta(r) \quad ; \quad \vec{\boldsymbol{B}} = \mu\, \vec{\boldsymbol{H}} = \mu\, \frac{\sigma_c \mathcal{V}}{2L} \frac{\left(r^2 - (\frac{d}{2} - a)^2\right)}{r} \vec{\boldsymbol{u}}_\theta(r) \tag{15}$$

Fora do tubo $r > \dfrac{d}{2}$ tem-se

$$\oint_{\partial S} \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = \mu_o I_{int}^{tot} \quad \Longrightarrow \quad B_\theta(r)\, 2\pi\, r = \mu_o I = \mu_o \frac{\sigma_c \mathcal{V}}{L} \pi\, a\,(d-a) \tag{16}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = B_\theta(r) \vec{\boldsymbol{u}}_\theta(\theta) = \mu_o \frac{I}{2\pi\, r} \vec{\boldsymbol{u}}_\theta(\theta) \qquad \text{ou} \qquad \vec{\boldsymbol{B}} = \mu_o \frac{\sigma_c \mathcal{V}}{2L} \frac{a\,(d-a)}{r} \vec{\boldsymbol{u}}_\theta(\theta) \tag{17}$$

[3.0] **c)** Determine a magnetização $\vec{\boldsymbol{M}}$ e as densidades de correntes de magnetização $\vec{\boldsymbol{J}}_M$ e $\vec{\boldsymbol{J}}'_M$, respetivamente dentro e na superfície do condutor.

R: Relembrando que $\chi_m = \frac{\mu - \mu_o}{\mu_o}$,

$$\vec{\boldsymbol{M}} = \chi_m \vec{\boldsymbol{H}} = \chi_m H_\theta(r) \vec{\boldsymbol{u}}_\theta(\theta) = M_\theta(r) \vec{\boldsymbol{u}}_\theta(\theta) \tag{18}$$

Para a superfície exterior onde $r = \frac{d}{2}$,

$$\vec{\boldsymbol{J}}'_M = \vec{\boldsymbol{M}} \times \vec{\boldsymbol{n}}_{ext} = \chi_m H_\theta \left(\frac{d}{2}\right) \vec{\boldsymbol{u}}_\theta(\theta) \times \vec{\boldsymbol{u}}_r(\theta) = -\chi_m \frac{a(d-a)}{d} \frac{\sigma_c \mathcal{V}}{L} \vec{\boldsymbol{u}}_z \tag{19}$$

enquanto que na superfície interior, onde $r = \frac{d}{2} - a$, se tem $\vec{J}'_M = 0$ porque $H_\theta(\frac{d}{2} - a) = 0$.

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M} = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\,M_\theta(r)\right)}{\partial r}\,\vec{u}_z \tag{20}$$

$$\vec{J}_M = \chi_m\,\frac{\sigma_c \mathcal{V}}{2L}\,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 - (\frac{d}{2} - a)^2\right)\vec{u}_z = \chi_m\,\frac{\sigma_c \mathcal{V}}{L}\,\vec{u}_z = \chi_m\,\vec{J} \tag{21}$$

[2.0] **d)** Assumindo que o tubo é agora envolvido por um cilindro condutor de espessura desprezável (Figura 3), com o mesmo eixo mas diâmetro $2\,d$, qual seria a pressão $\vec{\mathcal{P}}$ $(\frac{N}{m^2})$ sentida na superfície do cilindro se este fosse percorrido por uma corrente I igual e no mesmo sentido que a do tubo?

R: A corrente I distribuída na superfície do condutor de raio $R = d$ corresponde a uma densidade superficial $\vec{J}_s = \frac{I}{2\pi R}\vec{u}_z$. Um segmento de condutor de largura $R\,d\theta$ é atravessado por uma corrente $\delta I = J_s\,R\,d\theta$. Um segmento de comprimento $d\vec{l} = dz\,\vec{u}_z$ constitui um elemento de corrente $\delta I\,d\vec{l} = \vec{J}_s\,R\,d\theta\,dz = \vec{J}_s\,dS$, pelo que a força de Laplace é $d\vec{F}_m = \delta I\,d\vec{l} \times \vec{B} = dS\,\vec{J}_s \times \vec{B}$ donde

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{d\vec{F}_m}{dS} = -\frac{I\,B_\theta(d)}{2\pi\,d}\,\vec{u}_r(\theta) = -\mu_o\left(\frac{\sigma_c\,\mathcal{V}\,a(d-a)}{2\,d\,L}\right)^2\vec{u}_r(\theta) \tag{22}$$

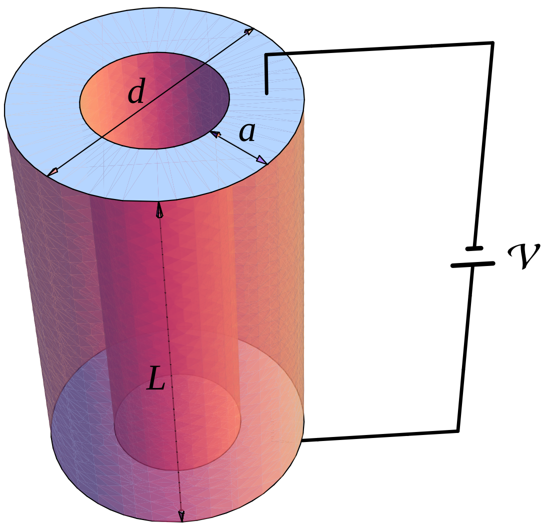

Figura 2

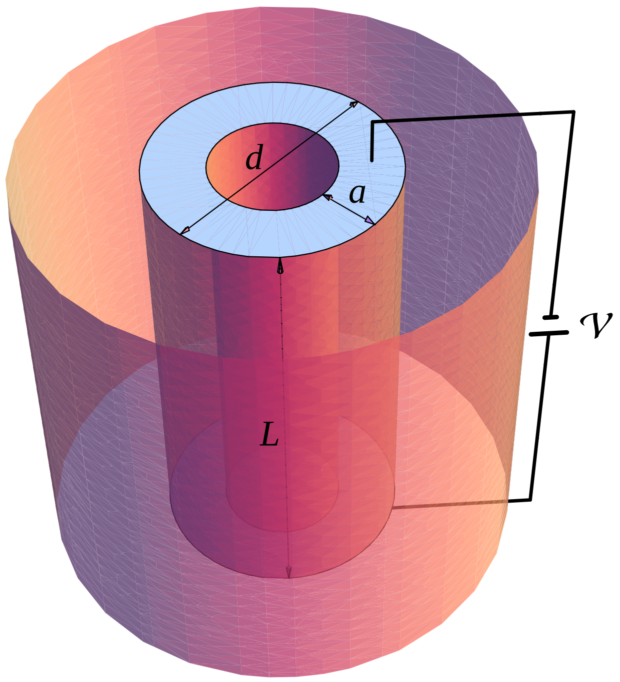

Figura 3

Electrostática

- $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r$
- $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times10^9 N.m^2.C^{-2}$
- $\oint_\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$
  $\nabla\times\vec{E} = 0$
- $\oint_S \vec{D}\cdot\vec{n}\, dS = \int_V \rho_{liv}\, dv$
  $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{liv}$
- $\oint_S \vec{P}\cdot\vec{n}\, dS = -\int_V \rho_{pol} dv$
  $\rho_{pol} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$
  $\sigma_{pol} = \vec{P}\cdot\vec{n}_{ext}$
- $\phi_P = \int_P^{Ref} \vec{E}\cdot d\vec{l}$
  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$
- $\vec{D} = \vec{P} + \varepsilon_0\vec{E}$
  $\vec{D} = \varepsilon_0(1+\chi_E)\vec{E} = \varepsilon\vec{E}$
- $Q = CV$
- $U_E = \left[\frac{1}{2}\right]\sum_i q_i\,\phi_i$
- $u_E = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$
  $U_E = \int_V u_E dv$
- $\vec{F}_s = \pm\frac{dU_E}{ds}\vec{u}_s$

Corrente eléctrica estacionária

- $\vec{J} = Nq\vec{v}$
- $\vec{J} = \sigma_c\vec{E}$
- $I = \int_S \vec{J}\cdot\vec{n}\, dS$
- $p = \vec{J}\cdot\vec{E}$
- $\oint_S \vec{J}\cdot\vec{n}\, dS = -\frac{d}{dt}\int_V \rho dv$
  $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -\frac{d\rho}{dt}$

Ondas electromagnéticas

- $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$
- $\vec{n} = \frac{\vec{\kappa}}{\kappa} = \frac{\vec{E}}{E}\times\frac{\vec{B}}{B}$
- $\frac{E}{B} = v$
- $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$
- $u = u_E + u_M$
- $I = \left\langle\vec{S}\cdot\vec{n}\right\rangle$

Magnetostática

- $\vec{B} = \int_\Gamma \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{u}_r}{r^2}$
  $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} H/m$
- $d\vec{F} = Id\vec{l}\times\vec{B}$
- $\oint_S \vec{B}\cdot\vec{n}\, dS = 0$
  $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$
- $\oint_\Gamma \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}\cdot\vec{n}\, dS$
  $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}$
- $\vec{B} = \mu_0(\vec{M}+\vec{H})$
  $\vec{B} = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H} = \mu\vec{H}$
- $\oint_\Gamma \vec{M}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}_M\cdot\vec{n}\, dS$
  $\vec{J}_M = \vec{\nabla}\times\vec{M}$
  $\vec{J}_M' = \vec{M}\times\vec{n}_{ext}$

Interacção de partículas e campos

- $\vec{F} = q\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)$

Campos variáveis e indução

- $\oint_\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\vec{n}\, dS$
  $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
- $\Phi_i = L_i I_i + M_{ij} I_j$
- $U_M = \left[\frac{1}{2}\right]\sum_i \Phi_i I_i$
- $u_M = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}$
  $U_M = \int_V u_M dv$
- $\vec{F}_s = \pm\frac{dU_M}{ds}\vec{u}_s$
- $\oint_\Gamma \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}\cdot\vec{n}\, dS + \frac{d}{dt}\int_S \vec{D}\cdot\vec{n}\, dS$
  $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

Óptica

- $n_1 sen\theta_1 = n_2 sen\theta_2$
- $tg\theta_B = \frac{n_2}{n_1}$
  interferência entre fendas
- $dsen\theta_{max} = m\lambda$
- $dsen\theta_{min} = m\lambda + \frac{\lambda}{m'}$ ($m' \leq N$ e par)
  difracção
- $asen\theta_{min} = m\lambda$

Algumas Primitivas

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+b\right)^{3/2}} = \frac{1}{b}\frac{x}{\sqrt{x^2+b}} \qquad \int \frac{xdx}{\left(x^2+b\right)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+b}}$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+b}} = \sqrt{x^2+b} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+b}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x(x+a)} = \frac{1}{a}\ln(\frac{x}{x+a})$$

Para o cálculo analítico de integrais pode ser consultado o endereço web: http://integrals.wolfram.com

Coordenadas cartesianas (x, y, z)

$$d\vec{l} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{u}_z$$
$$dS = dx\,dy$$
$$dV = dx\,dy\,dz$$
$$\vec{\nabla}F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z},\right)\times(A_x, A_y, A_z)$$

Coordenadas polares (r, θ)

$$d\vec{l} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta$$
$$dS = r\,dr\,d\theta$$

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

$$d\vec{l} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + dz\,\vec{u}_z$$
$$dV = r\,dr\,d\theta\,dz$$
$$\vec{\nabla}F = \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\,A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\,A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_z$$

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

$$d\vec{l} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + r\,sen\theta\,d\phi\,\vec{u}_\phi$$
$$dV = r^2\,dr\,sen\theta\,d\theta\,d\phi$$
$$\vec{\nabla}F = \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial F}{\partial \phi}\right)$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen\theta A_\theta\right) + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(A_\phi\right)$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left[\frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial(sen\theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial(sen\theta A_\theta)}{\partial \phi}\right]\vec{u}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{sen\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right]\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\vec{u}_\phi$$

Teorema da Divergência

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dV = \oint_S \vec{A}\cdot\vec{n}\,dS$$

Teorema da Stokes

$$\int_S \vec{\nabla}\times\vec{A}\,dS = \oint_\Gamma \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

Identidades vectoriais

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$
$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0$$
$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$$