



1º Exame de EO

19 de Janeiro de 2013

11H30

Duração: 3H00

Electromagnetismo e Óptica

Mestrado em Eng. Electrotécnica e Computadores (MEEC)

1º semestre de 2012-2013

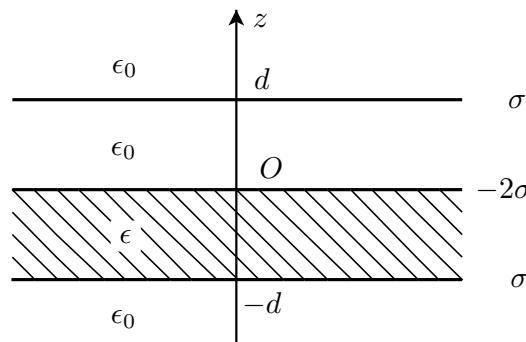
Prof. Jorge Romão
Prof. Amaro Rica da Silva

Profª. Raquel Crespo
Assist. João Pedro Canhoto

- Durante a realização do teste não é permitido o uso de telemóveis e calculadoras.
- Inicie a resolução de cada um dos problemas numa nova página.
- Identifique claramente todas as folhas do teste e não as separe.
- Se pretende completar a sua avaliação por testes deve entregar apenas os problemas 3 e 4, e escrever de forma visível a frase '2º TESTE' no cabeçalho da primeira página da sua prova.

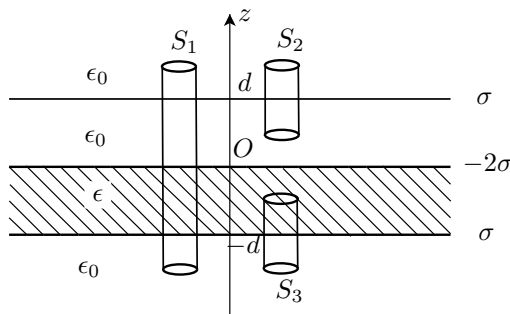
Problema 1.

Considere o sistema de três planos paralelos com área A , representados na figura. Os planos estão carregados uniformemente com as densidades indicadas ($\sigma > 0$). A distância entre os planos, d , é muito menor que as dimensões dos planos, de tal forma que na região central, longe dos bordos, tudo se passa como se os planos fossem infinitos. O espaço entre os planos colocados em $z = -d$ e $z = 0$, está preenchido com um dielétrico linear, isotrópico e homogéneo, de permitividade elétrica ϵ . No espaço restante considere o vazio.



- [1.0] a) Calcule \vec{D} para todos os pontos do espaço, situados na região central dos planos (longe dos bordos), e tais que a sua distância aos planos é muito menor que as dimensões lineares destes.

R: Devido à simetria do problema, longe dos bordos os campos, a existirem, são perpendiculares aos planos. Estamos assim em condições de usar a lei de Gauss generalizada (na presença de dielétricos). Para isso usamos as 3 superfícies de Gauss representadas na figura



Com a superfície S_1 mostramos que os campos fora são nulos. De facto, a existirem só podem contribuir para o fluxo no topo e na base (na superfície lateral $\vec{D} \cdot \vec{n}_L = 0$) e como há simetria esses fluxos devem ser iguais. Obtemos então

$$\int_{S_1} \vec{D} \cdot \vec{n} dS = S_1(\sigma - 2\sigma + \sigma)$$

$$2|\vec{D}|S_1 = 0$$

e portanto $\vec{D} = 0$ para $|z| > d$. Usamos agora a superfície S_2 para calcular o campo na região $0 < z < d$. De facto como o campo é nulo fora só temos fluxo na base. Os campos devem ser dirigidos das cargas positivas para as negativas e portanto $\vec{D} \cdot \vec{n} = |\vec{D}|$, com $\vec{n} = -\vec{e}_z$. Obtemos finalmente

$$\int_{S_1} \vec{D} \cdot \vec{n} dS = S_2\sigma$$

$$|\vec{D}|S_2 = S_2\sigma$$

e portanto $\vec{D} = -\sigma\vec{e}_z$. Usando a superfície S_3 podemos mostrar que $\vec{D} = \sigma\vec{e}_z$ para $-d < z < 0$. Obtemos portanto

$$\begin{array}{ll} \vec{D} = 0 & |z| > d \\ \vec{D} = -\sigma\vec{e}_z & 0 < z < d \\ \vec{D} = \sigma\vec{e}_z & -d < z < 0 \end{array}$$

[1.0] b) Calcule \vec{P} e determine a densidade de cargas de polarização, σ_{pol} , junto ao plano inferior.

R: Como $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ obtemos no dielétrico (a única região onde há polarização)

$$\vec{P} = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \vec{D} = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \sigma\vec{e}_z$$

onde usámos a expressão para o vector \vec{D} na região $-d < z < 0$. Na superfície do dielétrico em $z = -d$ a normal exterior é $\vec{n}_{ext} = -\vec{e}_z$ pelo que

$$\sigma_{pol} = (\vec{P} \cdot \vec{n}_{ext}) = -\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \sigma < 0 .$$

[1.0] c) Verifique a relação de descontinuidade para o vector \vec{D} no plano intermédio, isto é, mostre que

$$D_n(z = 0^+) - D_n(z = 0^-) = -2\sigma$$

R: Da alínea a) obtemos

$$D_z(z = 0^+) = -\sigma, \quad D_z(z = 0^-) = \sigma$$

pelo que considerando a normal na direcção de \vec{e}_z obtemos

$$D_z(z = 0^+) - D_z(z = 0^-) = -\sigma - \sigma = -2\sigma .$$

[1.0] d) Determine o potencial electrostático para $-2d \leq z \leq 0$ admitindo que o potencial é nulo para $z = 0$. Qual é maior, $\phi(-d)$ ou $\phi(d)$? Justifique a resposta.

R: Tomando o ponto $z = 0$ como referência do potencial, $\phi(0) = 0$, temos que o potencial num ponto arbitrário z é dado por

$$\phi(z) = \int_z^0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Nas diferentes regiões o campo \vec{E} é dado por

$$\begin{aligned} \vec{E} &= 0 & |z| > d \\ \vec{E} &= \frac{\sigma}{\epsilon} \vec{e}_z & -d < z < 0 \\ \vec{E} &= -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z & 0 < z < d \end{aligned}$$

1) $-d \leq z \leq 0$

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \int_z^0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_z^0 \vec{E} \cdot dz = \frac{\sigma}{\epsilon} \int_z^0 dz \\ &= \frac{\sigma}{\epsilon} [z]_z^0 = -\frac{\sigma}{\epsilon} z \end{aligned}$$

2) $-2d \leq z \leq -d$

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \int_z^0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_z^{-d} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{-d}^0 \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= 0 + \phi(-d) = \frac{\sigma}{\epsilon} d \end{aligned}$$

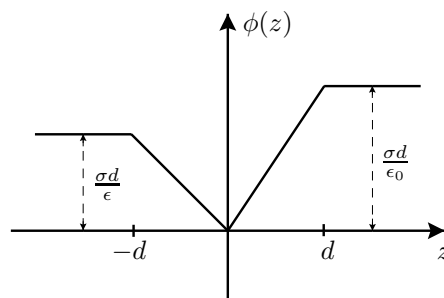
pois o campo \vec{E} é nulo entre $-2d < z < -d$ e portanto o potencial é constante (e não nulo) nessa região. Embora não fosse pedido o potencial nas outras regiões é

3) $0 \leq z \leq d$

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \int_z^0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_0^z \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_0^z \vec{E} \cdot dz \\ &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_0^z dz = \frac{\sigma}{\epsilon_0} z \end{aligned}$$

4) $z > d$

Como $\vec{E} = 0$, devemos ter $\phi(z) = \phi(d) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$. Finalmente $\phi(d) > \phi(-d)$ pois $\epsilon > \epsilon_0$. O potencial está representado na figura junta.



Notar que $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$, isto é

$$E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z}.$$

[1.0] e) Determine a energia eletrostática do sistema.

R: Há pelo menos 3 maneiras de calcular a energia do sistema (só precisava de fazer uma, claro)

1º Método: Usamos a expressão de Maxwell para a energia em termos dos campos,

$$U_E = \frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} dV$$

O sistema tem duas regiões de igual volume ($V = Ad$) e com campos diferentes. Nas nossas aproximações, os campos são constantes e temos (1=vazio, 2=dielétrico)

$$\vec{D}_1 \cdot \vec{E}_1 = \frac{\sigma^2}{\epsilon_0}, \quad \vec{D}_2 \cdot \vec{E}_2 = \frac{\sigma^2}{\epsilon}$$

e portanto

$$U_E = \frac{\sigma^2 A d}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon} \right) .$$

2º Método: Usamos a expressão em termos das cargas e potenciais.

$$\begin{aligned} U_E &= \frac{1}{2} \sum_i Q_i \phi_i = \frac{1}{2} [\sigma A \phi(-d) - 2\sigma A \phi(0) + \sigma A \phi(d)] \\ &= \frac{\sigma^2 A d}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon} \right) . \end{aligned}$$

onde usamos as expressões para os potenciais.

3º Método: O sistema pode ser pensado como um conjunto de dois condensadores em série, com capacidades,

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 A}{d}, \quad C_2 = \frac{\epsilon A}{d}$$

A capacidade do condensador equivalente é

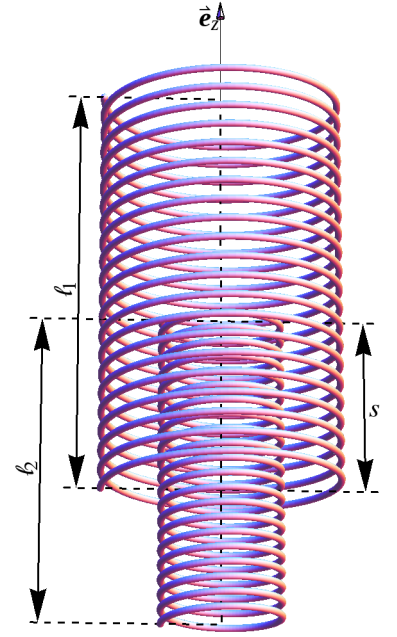
$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d}{A} \left(\frac{1}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon} \right)$$

e obtemos para a energia

$$U_E = \frac{Q^2}{2C_{\text{eq}}} = \frac{\sigma^2 A^2}{2C_{\text{eq}}} = \frac{\sigma^2 A d}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon} \right) .$$

Problema 2.

Dois solenóides coaxiais, de comprimentos ℓ_1, ℓ_2 , raios a_1, a_2 , e número de voltas N_1, N_2 , respetivamente, são percorridos pela corrente I no mesmo sentido em ambos. Assumindo que uma porção de comprimento $z < \ell_2$ do solenóide mais fino está parcialmente inserido no outro, e considerando que $\ell_1 > \ell_2 \gg a_1 > a_2$:



- [2.0] a) Determine o campo magnético dentro dos solenóides, em todas as regiões (despreze as variações de campo nos bordos).

R: Utilizando a lei de Ampère para cada solenóide separado conclui-se que o campo dentro dos solenóides é em boa aproximação $|\vec{B}| = \mu_o n I$, onde n é a densidade de espiras por unidade de comprimento, e fora destes é $\vec{B} \approx 0$. Assim, fazendo $z = 0$ na base do solenóide maior,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{B} = \mu_o \frac{N_1}{\ell_1} I \vec{e}_z & (\ell_1 - s < z < \ell_1) \\ \vec{B} = \mu_o \frac{N_1}{\ell_1} I \vec{e}_z & (0 < z < s) \& (a_2 < r < a_1) \\ \vec{B} = \mu_o \left(\frac{N_1}{\ell_1} + \frac{N_2}{\ell_2} \right) I \vec{e}_z & (0 < z < s) \& (0 < r < a_2) \\ \vec{B} = \mu_o \frac{N_2}{\ell_2} I \vec{e}_z & (s - \ell_2 < z < 0) \end{array} \right.$$

- [1.0] b) Determine os coeficientes de auto-indução L_1, L_2 e de indução mútua M_{12}, M_{21} dos solenóides.

R: O coeficiente de auto-indução de um solenóide com N espiras e raio a é determinado pelo auto-fluxo $\phi = N |\vec{B}| \pi a^2 = \mu_o N n \pi a^2 I = L I$, donde $L = \mu_o N n \pi a^2$.

Assim $L_1 = \mu_o \frac{N_1^2}{\ell_1} \pi a_1^2$ e $L_2 = \mu_o \frac{N_2^2}{\ell_2} \pi a_2^2$.

O coeficiente de indução mútua deve-se ao fluxo do campo de um solenóide no outro. Assim, considerando o fluxo do campo do solenóide grande no solenóide pequeno, notando que só $\frac{N_2}{\ell_2} s$ espiras serão atravessadas, temos

$$\phi_{21} = \vec{B}_1 \cdot \frac{N_2}{\ell_2} s \pi a_2^2 \vec{e}_z = \mu_o \frac{N_1 N_2}{\ell_1 \ell_2} s \pi a_2^2 I = M_{21} I. \quad (1)$$

Assim $M_{21} = \mu_o \frac{N_1 N_2}{\ell_1 \ell_2} s \pi a_2^2$ e pode-se verificar que $M_{12} = M_{21}$ calculando o fluxo do campo do solenóide pequeno no grande.

- [1.0] c) Determine a energia magnética total W_m do sistema.

R: Por definição $W_m = \frac{1}{2} (\Phi_1 I_1 + \Phi_2 I_2)$, onde os fluxos totais $\Phi_1 = L_1 I_1 + M_{12} I_2$ e $\Phi_2 = M_{21} I_1 + L_2 I_2$, donde também se pode escrever, considerando $I_1 = I_2 = I$

$$W_m = \frac{1}{2} (L_1 I_1^2 + 2M_{12} I_1 I_2 + L_2 I_2^2) = \frac{1}{2} \left(\mu_o \frac{N_1^2}{\ell_1} \pi a_1^2 + 2\mu_o \frac{N_1 N_2}{\ell_1 \ell_2} s \pi a_2^2 + \mu_o \frac{N_2^2}{\ell_2} \pi a_2^2 \right) I^2 \quad (2)$$

- [1.0] d) Determine a componente na direcção do eixo \vec{e}_z da força \vec{F} que os solenóides exercem entre si. O que acontece a esta força se se mudar a direcção da corrente num dos solenóides?

R: A força entre os solenóides tem uma componente atrativa

$$F_z = \left(\frac{\partial \mathcal{W}_m}{\partial s} \right)_I = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell_1 \ell_2} \pi a_2^2 I^2 \quad (3)$$

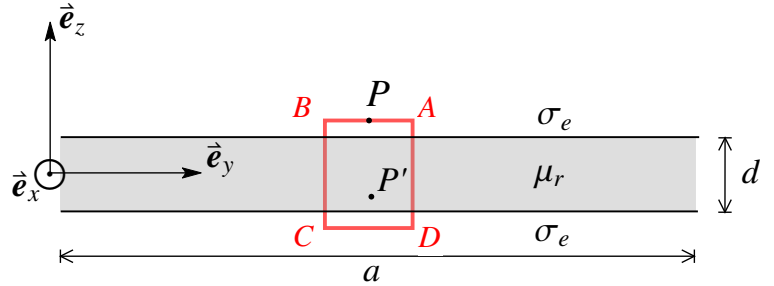
se ambas as correntes estiverem no mesmo sentido, e repulsiva com a mesma magnitude se as correntes tiverem sentidos contrários.

Problema 3. (2º Teste)

Uma correia muito comprida, de largura a e espessura d , tem depositada, nas suas faces superior e inferior, cargas com uma densidade superficial σ_e , e desloca-se horizontalmente com uma velocidade

$$\vec{v} = v_o \vec{e}_x$$

O material da correia tem permeabilidade relativa μ_r .



- [1.0] a) Determine a densidade superficial de corrente \vec{J}_s e a corrente total I transportada por cada face da correia.

R: As cargas à superfície contribuem para a densidade de corrente superficial $\vec{J}_s = \sigma_e \vec{v}$ ($\frac{A}{m}$) em cada face da correia. Para cada secção transversal da correia, a corrente total que a atravessa é $I_{tot} = 2I = 2J_s a$ (A), onde $I = J_s a = \sigma_e v_o a$ (A) é a corrente transportada por cada face da correia.

- [2.0] b) Determine o campo magnético \vec{B} em pontos P e P' , fora e dentro da correia, assumindo que os pontos estão longe dos bordos e a largura e comprimento da correia são grandes comparadas com a distância deles à correia. Explique a sua resposta.

R: Na aproximação considerada, podemos usar a lei de Ampère e considerar um caminho rectangular $\Gamma = ABCD$, passando por P , simétrico em relação à correia. Pequenos deslocamentos na direcção \vec{e}_y não alteram a distribuição relativa de correntes em relação a P , pelo que o campo \vec{B} deve ser invariante por translações horizontais. Assim a soma dos integrais de caminho entre BC e DA deve anular-se porque a única diferença entre os dois é o sentido do percurso. Pela regra da mão direita (e pela Lei de Biot-Savart), o campo \vec{B} acima do plano de corrente deve estar orientado segundo $-\vec{e}_y$, e abaixo do plano de corrente orientado segundo \vec{e}_y , e deve ter o mesmo valor absoluto a igual distância acima ou abaixo do plano de corrente. Assim podemos concluir que $\int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{CD} \vec{B} \cdot d\vec{l}$, pelo que a lei de Ampère resulta em

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2 \int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o I_{int} \implies 2B_y(P) (y_B - y_A) = \mu_o 2J_s (y_A - y_B) \quad (4)$$

$$\therefore \vec{B}(P) = -\mu_o J_s \vec{e}_y = -\mu_o \sigma_e v_o \vec{e}_y \quad (5)$$

Nesta aproximação o campo não depende da distância à correia, o que significa então que dentro desta o campo total deve anular-se, ou seja $\vec{B}(P') = 0$, porque a contribuição da corrente da face superior para o campo em P' é simétrica da contribuição para o campo em P' da corrente da face inferior.

Uma bobina de massa m e altura desprezável, formada por N espiras condutoras, finas e quadradas, de lado $b \ll a$, e resistência R , é colocada com o seu centro acima da correia, a uma distância mínima que lhe permita rodar livremente.

- [1.0] c) Determine a corrente induzida I_{ind} na bobine se esta rodar em torno dum eixo horizontal, passando pelo meio de dois lados opostos, com velocidade angular $\vec{\omega} = \omega_o \vec{e}_x$.

R: O fluxo de \vec{B} através da bobina é

$$\Phi(t) = \int \int_{bob.} \vec{B} \cdot d\vec{S}(t) = N b^2 \vec{B} \cdot \vec{n}(t) = N b^2 B_y \cos(\omega_o t + \alpha), \quad (6)$$

onde α representa o ângulo inicial entre \vec{B} e a normal $\vec{n}(0)$ às espiras da bobina (i.e. a direcção do seu eixo), b^2 a área de uma espira e Nb^2 a área total que a bobina apresenta para o fluxo. De acordo com a lei de Faraday deve aparecer uma força eletromotriz

$$\varepsilon_{im} = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = N b^2 B_y \omega_o \sin(\omega_o t + \alpha) \quad (7)$$

$$\text{donde } I_{ind} = \frac{\varepsilon_{im}}{R} = -\frac{\mu_o \sigma_e v_o \omega_o N b^2}{R} \sin(\omega_o t + \alpha).$$

- [1.0] d) Se a normal \vec{n} ao plano da espira for paralela a $\vec{e}_x + \vec{e}_y$, que força \vec{F} e binário \vec{N} devem ser aplicados à bobina, quando percorrida por uma corrente I , para a manter imóvel.

R: Para manter o centro da espira imóvel é necessário apenas aplicar uma força $\vec{F} = -m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$ para compensar o seu peso, já que as forças magnéticas sobre a bobina se anulam. Efectivamente, quando \vec{B} é constante,

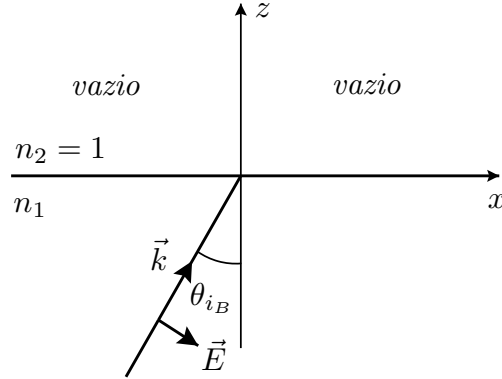
$$\vec{F}_m = \oint_{bob} d\vec{F}_m = \oint_{bob} I d\vec{l} \times \vec{B} = I \left(\oint_{bob} d\vec{l} \right) \times \vec{B} \equiv 0 \quad (8)$$

Quanto ao binário, cada espira possui um momento magnético $\vec{m} = I \vec{S} = I b^2 \left(\frac{\vec{e}_x + \vec{e}_y}{\sqrt{2}} \right)$ que sofre um binário $\vec{m} \times \vec{B}$ relativo ao seu centro quando imersa num campo constante \vec{B} . Assim o binário total atuando nas N espiras da bobina é $N \vec{m} \times \vec{B}$, pelo que o binário a aplicar para cancelar a rotação da bobina é

$$\vec{N} = -N \vec{m} \times \vec{B} = -N I b^2 \left(\frac{\vec{e}_x + \vec{e}_y}{\sqrt{2}} \right) \times B_y \vec{e}_y = \mu_o \sigma_e v_o N I b^2 \frac{\vec{e}_z}{\sqrt{2}} \quad (9)$$

Problema 4. (2º Teste)

Considere uma onda plana monocromática que se propaga num meio não magnético, ($\mu_1 = \mu_0$), com permitividade $\epsilon_1 = \frac{16}{9}\epsilon_0$. Conforme indicado na figura, esta onda incide na superfície de separação ($z = 0$) do meio com o vazio com um ângulo de incidência igual ao ângulo de Brewster, isto é, $\theta_i = \theta_{i_B}$.



Sabendo que o campo \vec{E} da onda é dado por

$$\begin{cases} E_x = \beta E_0 \sin [\omega t - |\vec{k}| (\alpha x + \beta z)] \\ E_y = 0 \\ E_z = -\alpha E_0 \sin [\omega t - |\vec{k}| (\alpha x + \beta z)] \end{cases}$$

[1.0] a) Determine o seno do ângulo de incidência, $\sin(\theta_{i_B})$.

R: Como θ_{i_B} é o ângulo de Brewster devemos ter

$$\tan \theta_{i_B} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{n_1}$$

Por outro lado

$$n_1 = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$$

logo $\tan \theta_{i_B} = 3/4$. Obtemos então,

$$\sin^2 \theta_{i_B} + \cos^2 \theta_{i_B} = 1 \Rightarrow 1 + \tan^2 \theta_{i_B} = \frac{1}{\cos^2 \theta_{i_B}}$$

$$\cos^2 \theta_{i_B} = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta_{i_B}} = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \theta_{i_B} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin \theta_{i_B} = \frac{3}{5}$$

[1.0] b) Determine as constantes α e β e mostre que a onda é transversal.

R: Da expressão do campo da onda temos

$$k_x = |\vec{k}| \alpha, \quad k_z = |\vec{k}| \beta \Rightarrow \vec{n} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} = \alpha \vec{e}_x + \beta \vec{e}_z \quad (10)$$

Da geometria da figura temos

$$\alpha = \sin \theta_{i_B} = \frac{3}{5}, \quad \beta = \cos \theta_{i_B} = \frac{4}{5}$$

Para demonstrar a transversalidade, calculamos $\vec{E} \cdot \vec{n}$. Obtemos

$$\begin{aligned}\vec{E} \cdot \vec{n} &= E_x \alpha + E_z \beta \\ &= \alpha \beta E_0 \sin[\dots] - \alpha \beta E_0 \sin[\dots] \\ &= 0\end{aligned}$$

o que mostra o carácter transversal das ondas. Notar que o resultado não depende dos valores de α e β .

[0.5] c) A polarização da onda.

R: As duas componentes da onda estão em fase por isso a polarização é linear. De facto

$$E_z = -\frac{\alpha}{\beta} E_x$$

[0.5] d) O campo \vec{H} da onda.

R: Devemos ter

$$\vec{H} = \frac{1}{Z_1} \vec{n} \times \vec{E}$$

onde

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \frac{3}{4} c \mu_0 = \frac{3}{4} 120\pi (\Omega) = 90\pi (\Omega)$$

e

$$\vec{n} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \alpha & 0 & \beta \\ \beta E_0 \sin[\dots] & 0 & -\alpha E_0 \sin[\dots] \end{vmatrix} = -(-\alpha^2 - \beta^2) E_0 \sin[\dots] \vec{e}_y = E_0 \sin[\dots] \vec{e}_y$$

então obtemos finalmente

$$\vec{H} = \frac{1}{Z_1} E_0 \sin[\dots] \vec{e}_y = \frac{E_0}{90\pi} \sin[\dots] \vec{e}_y \text{ (A/m)}$$

[1.0] e) O valor médio do vector de Poynting \vec{S} da onda incidente. Qual a percentagem de energia transmitida?

R: O vector de Poynting é

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{Z_1} |E|^2 \vec{n}$$

e portanto ($\alpha^2 + \beta^2 = 1$)

$$\langle |\vec{S}| \rangle = \frac{E_0^2}{Z_1} \langle \sin^2[\dots] \rangle$$

Usando $\langle \sin^2[\dots] \rangle = 1/2$, obtemos

$$\langle |\vec{S}| \rangle = \frac{E_0^2}{2Z_1} = \frac{E_0^2}{180\pi} \text{ (W/m}^2\text{)}$$

Como a onda incide segundo o ângulo de Brewster não há onda reflectida e portanto a percentagem de energia transmitida é 100%.

[1.0] f) Determine $\sin(\theta_{i_c})$, onde θ_{i_c} é o ângulo crítico de reflexão total. Mostre que $\theta_{i_c} > \theta_{i_B}$.

R: O ângulo crítico de reflexão total ocorre quando o ângulo de refração é $\pi/2$ e $n_1 > n_2$ (como no caso do problema). Assim

$$n_1 \sin \theta_{i_c} = n_2 \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

ou seja

$$\sin \theta_{i_c} = \frac{1}{n_1} = \frac{3}{4}$$

Por outro lado de $\tan \theta_{i_B} = 1/n_1$ resulta

$$\sin \theta_{i_B} = \frac{1}{n_1} \cos \theta_{i_B} < \frac{1}{n_1} = \sin \theta_{i_c}$$

E se $\sin \theta_{i_B} < \sin \theta_{i_c}$, como os ângulos estão no primeiro quadrante devemos ter $\theta_{i_B} < \theta_{i_c}$.