2° Exame de EO

29 de Janeiro de 2013
8H00
Duração: 3H00

Electromagnetismo e Óptica

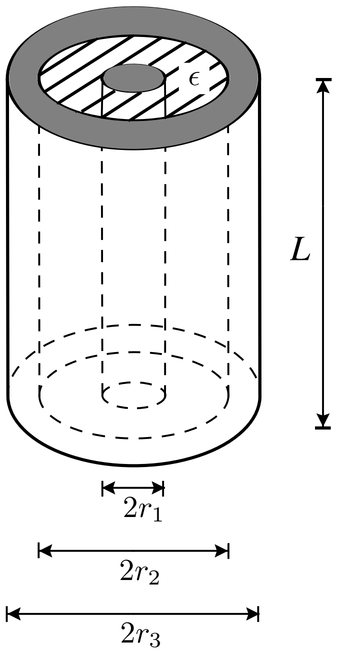
Mestrado em Eng. Electrotécnica e Computadores (MEEC)
1° semestre de 2012-2013

Prof. Jorge Romão
Prof. Amaro Rica da Silva
Profª. Raquel Crespo
Assist. João Pedro Canhoto

- Durante a realização do teste não é permitido o uso de telemóveis e calculadoras.
- Inicie a resolução de cada um dos problemas numa nova página.
- Identifique claramente todas as folhas do teste e não as separe.

Problema 1.

Considere o sistema representado na figura constituído por dois condutores cilíndricos maciços em equilíbrio electrostático, com eixos coincidentes e altura $\boldsymbol{L}$. O condutor interior tem raio $\boldsymbol{r_1}$ e condutor exterior limitado pelas superfícies cilíndricas de raios $\boldsymbol{r_2}$ e $\boldsymbol{r_3}$. Na espaço entre os condutores está preenchido por um dielétrico linear, homogéneo e isótropo de permitividade $\boldsymbol{\epsilon}$. O condutor interior tem uma carga total $\boldsymbol{Q = \lambda L}$, onde $\boldsymbol{\lambda}$(C/m) é a carga por unidade de comprimento (altura) do cilindro. O condutor exterior tem carga total nula. Considere que $\boldsymbol{L \gg r_1, r_2, r_3}$, para poder considerar o sistema com altura infinita para o cálculo dos campos.



[1.0] **a)** Determine a **carga total** nas superfícies interior e exterior do condutor exterior. Justifique a resposta.

R: Considerando a geometria cilíndrica do problema e que $L \gg r_1, r_2, r_3$ os campos são radiais. Usamos então uma superfície cilíndrica, S, de raio r, tal que $r_2 < r < r_3$ e altura $h < L$, isto é com a superfície lateral dentro do condutor exterior. Como o campo elétrico é nulo no interior dos condutores em equilíbrio eletrostático, devemos ter

$$\begin{aligned} \int_S \vec{D} \cdot \vec{n} =& (\lambda h + \lambda_2 h) \\ 0 =& (\lambda + \lambda_2) h \end{aligned}$$

e portanto a densidade de carga por unidade de comprimento na superfície interior do condutor exterior, λ_2, é

$$\lambda_2 = -\lambda \ .$$

Logo a **carga total** na superfície interior do condutor exterior é $Q_{2\text{ int}} = -Q$. Como o condutor tem carga total nula, devemos ter $Q_{2\text{ ext}} = Q$.

[1.0] **b)** Determine, detalhando todos os cálculos efetuados, a expressão do vector $\vec{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{r})$ em todo o espaço ($\boldsymbol{r} < \boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_1 < \boldsymbol{r} < \boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_2 < \boldsymbol{r} < \boldsymbol{r}_3,\ \boldsymbol{r} > \boldsymbol{r}_3$). Exprima os resultados em termos de $\boldsymbol{\lambda}$.

R: Como já sabemos que os campos são radiais e onde estão as cargas nas diferentes superfícies dos condutores, usamos superfícies de Gauss cilíndricas com os raios apropriados para cada região. Temos sucessivamente,

- $r < r_1$

O campo $\vec{E}$ é nulo dentro do condutor e portanto, $\vec{D} = 0$.

- $r_1 < r < r_2$

Usando a lei de Gauss generalizada para um cilindro de altura $h < L$ obtemos

$$\begin{aligned}\int_S \vec{D}\cdot\vec{n}dS =&\lambda h \Rightarrow \int_S |\vec{D}|dS = \lambda h\\ \Rightarrow |\vec{D}|\int_S dS =&\lambda h \Rightarrow |\vec{D}|2\pi r h = \lambda h\\ |\vec{D}| =&\frac{\lambda}{2\pi}\frac{1}{r} \Rightarrow \vec{D} = \frac{\lambda}{2\pi}\frac{1}{r}\vec{e}_r\end{aligned}$$

- $r_2 < r < r_3$

O campo $\vec{E}$ é nulo dentro do condutor e portanto, $\vec{D} = 0$.

- $r > r_3$

Como as cargas no condutor exterior se anulam, temos

$$\int_S \vec{D}\cdot\vec{n}dS =\lambda h \Rightarrow \vec{D} = \frac{\lambda}{2\pi}\frac{1}{r}\vec{e}_r$$

[1.0] **c)** Determine, detalhando todos os cálculos, a expressão do potencial elétrico em todas as regiões do espaço, tomando como referência $\boldsymbol{\phi(r_3) = 0}$.

R: Como $\phi(r_3) = 0$ e o condutor é uma equipotencial devemos ter também $\phi(r) = 0$ para $r_2 \leq r \leq r_3$. Nas outras regiões temos

- $r_1 \leq r \leq r_2$

$$\phi(r) = \int_r^{r_3} \vec{E}\cdot\vec{dr}$$

onde ($\vec{D} = \epsilon\vec{E}$)

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon}\frac{1}{r}\vec{e}_r$$

Obtemos então

$$\begin{aligned}\phi(r) = \int_r^{r_3}\vec{E}\cdot\vec{dr} &= \int_r^{r_2}\vec{E}\cdot\vec{dr} + \int_{r_2}^{r_3}\vec{E}\cdot\vec{dr}\\ &=\frac{\lambda}{2\pi\epsilon}\int_r^{r_2}\frac{dr}{r} + 0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon}\log\frac{r_2}{r}\end{aligned}$$

- $0 \leq r \leq r_1$

Os condutores são equipotencias e o potencial é uma função contínua. Portanto nesta região o potencial é igual a $\phi(r_2) = \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon} \log \dfrac{r_2}{r_1}$.

- $r \geq r_3$

Finalmente nesta região temos

$$\begin{aligned}
\phi(r) &= \int_r^{r_3} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_{r_3}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{r} \\
&= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_3}^{r} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{r_3}{r}
\end{aligned}$$

Em resumo

$$\begin{aligned}
\phi(r) =& \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \log \frac{r_2}{r_1} && 0 \leq r \leq r_1 \\
\phi(r) =& \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \log \frac{r_2}{r} && r_1 \leq r \leq r_2 \\
\phi(r) =& 0 && r_2 \leq r \leq r_3 \\
\phi(r) =& \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{r_3}{r} && r \geq r_3
\end{aligned}$$

[1.0] **d)** Determine as densidades de carga de polarização nas duas superfícies do dielétrico, $\boldsymbol{\sigma'(r_1)}$, $\boldsymbol{\sigma'(r_2)}$ e a densidade de carga de polarização em volume $\boldsymbol{\rho'}$.

R: O vetor polarização só existe no interior do dielétrico e é dado por $\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}$, ou seja

$$\vec{P} = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \vec{D} = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \frac{\lambda}{2\pi} \frac{1}{r} \vec{e}_r$$

Portanto para as cargas de polarização obtemos

- $\boldsymbol{\sigma'(r_1)}$ e $\boldsymbol{\sigma'(r_2)}$

  A normal exterior em r_1 é $\vec{n}_{\text{ext}}(r_1) = -\vec{e}_r$ e em r_2 é $\vec{n}_{\text{ext}}(r_2) = \vec{e}_r$, pelo que

$$\begin{aligned}
\sigma'(r_1) =& \vec{P} \cdot \vec{n}_{\text{ext}}(r_1) = -\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \frac{\lambda}{2\pi} \frac{1}{r_1} \\
\sigma'(r_2) =& \vec{P} \cdot \vec{n}_{\text{ext}}(r_2) = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \frac{\lambda}{2\pi} \frac{1}{r_2}
\end{aligned}$$

- $\boldsymbol{\rho'(r)}$

  Como o dielétrico é linear, isótropo e homogéneo, temos

$$\rho' = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = -\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \rho$$

  Como $\rho = 0$ no interior do dielétrico, temos $\rho' = 0$. Outra maneira seria utilizar a expressão para a divergência em coordenadas cilíndricas, e obter

$$\rho' = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r P_r) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \frac{\lambda}{2\pi} \right) = 0$$

[1.0] **e)** Determine a energia eletrostática no interior do sistema.

R: A energia no interior do sistema pode ser calculada de duas maneiras.

- **Cargas e Potenciais**

$$U_E = \frac{1}{2}\sum_{\alpha} Q_\alpha \phi_\alpha$$

onde a soma é sobre os condutores. Como $\phi_1 = \phi(r_1) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon}\log\frac{r_2}{r_1}$, $\phi_2 = \phi(r_2) = 0$ e $Q_1 = \lambda L$, obtemos

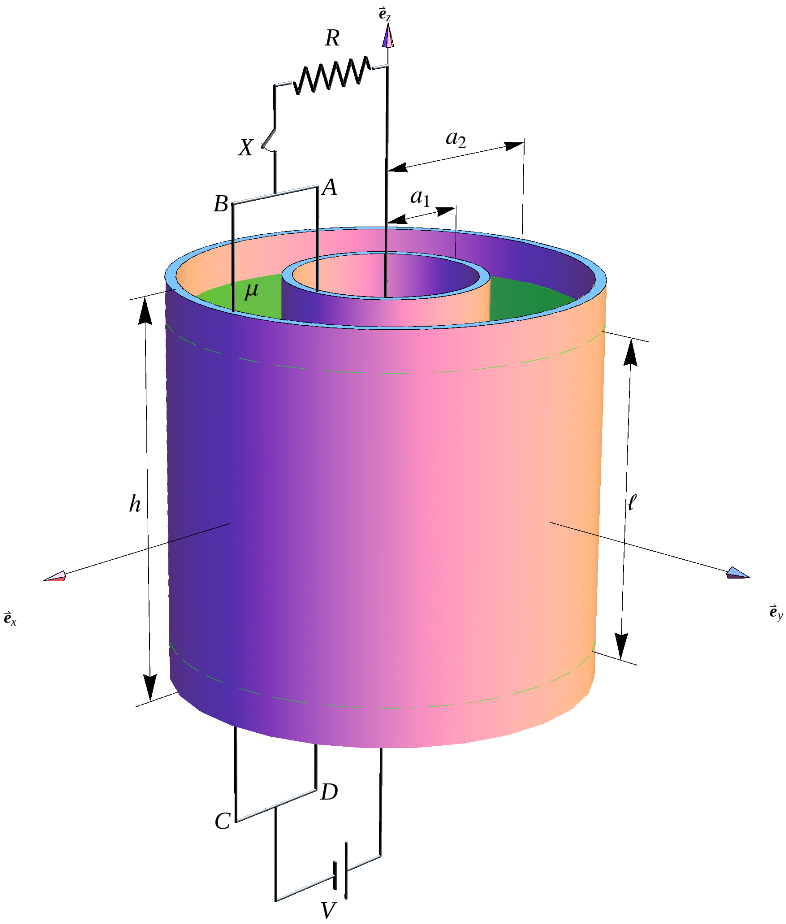
$$U_E = \frac{1}{2}\,\frac{\lambda^2 L}{2\pi\epsilon}\,\log\frac{r_2}{r_1}$$

- **Expressão de Maxwell para a energia**

$$\begin{aligned} U_E =& \frac{1}{2}\int \vec{D}\cdot\vec{E}\,dV \\ =& \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{\epsilon}\int_0^L dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2}\,r dr \\ =& \frac{1}{2}\,\frac{\lambda^2 L}{2\pi\epsilon}\,\log\frac{r_2}{r_1} \end{aligned}$$

Problema 2.

Dois cilindros condutores coaxiais de altura h e raios a_1 e a_2 estão ligados a uma resistência R e uma fonte de alimentação V como indicado na figura. Os cilindros são feitos do mesmo material condutor de espessura δ desprezável em comparação com as outras dimensões. A encher o espaço entre os dois cilindros existe um material de permeabilidade magnética μ e altura $\ell \approx h$, e o espaço dentro do cilindro interior e fora do exterior está vazio (ar).



[0.5] **a)** Sabendo que a resistência do cilindro interior é R_1, determine a resistência R_2 do cilindro exterior.

R: O perímetro do cilindro exterior é a_2/a_1 maior que o do cilindro interior, pelo que sendo as restantes dimensões iguais, podemos considerar o cilindro de fora como um paralelo de resistências, donde $R_2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right) R_1$.

[0.5] **b)** Considere agora que se fecha o interruptor em X e que se espera o tempo suficiente para se atingir o regime estacionário. Determine as correntes I_1 e I_2 que passam nos cilindros de resistência R_1 e R_2, respetivamente. Justifique todos os resultados.

R: A queda de tensão através de R_1 é

$$V - RI_o = R_1 I_1$$

donde $I_1 = \frac{V-RI_o}{R_1}$, e de forma análoga, $I_2 = \frac{V-RI_o}{R_2} = \frac{a_2}{a_1} I_1$. Tendo em conta que que a resistência equivalente dos dois cilindros em paralelo é $R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$

$$I_o = \frac{V}{R + R_{eq}} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} I_1 = \dfrac{V}{R_1\left(1 + \frac{R}{R_{eq}}\right)} \\ I_2 = \dfrac{V}{R_2\left(1 + \frac{R}{R_{eq}}\right)} \end{cases}$$

[2.0] **c)** Nestas condições, determine o campo magnético $\vec{B}$ em todas as regiões do espaço onde $|z| < \ell$, assumindo que $h \gg a_1, a_2$ e desprezando variações junto aos bordos dos cilindros. Qual o valor da descontinuidade de $\vec{\boldsymbol{H}}$ nas superfícies $r = a_1$ e $r = a_2$? Se não determinou I_1 e I_2 apresente os resultados em termos destas correntes.

R: Utilizando a lei de Ampére ao longo de circunferências Γ, horizontais e de raio r, centradas no eixo $\vec{\boldsymbol{e}}_z$, e dada a simetria cilíndrica do campo, podemos concluir, usando um sistema de referência cilíndrico $\{\vec{\boldsymbol{e}}_r, \vec{\boldsymbol{e}}_\theta, \vec{\boldsymbol{e}}_z\}$,

$$\oint_\Gamma \vec{\boldsymbol{H}}\cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = I_{int} \Longleftrightarrow \begin{cases} \vec{\boldsymbol{H}} = \dfrac{I_o}{2\pi r}\vec{\boldsymbol{e}}_\theta & (0 < r < a_1) \\ \vec{\boldsymbol{H}} = \dfrac{I_o - I_1}{2\pi r}\vec{\boldsymbol{e}}_\theta & (a_1 < r < a_2) \\ \vec{\boldsymbol{H}} = 0 & (r > a_2) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \vec{\boldsymbol{B}} = \dfrac{\mu_o I_o}{2\pi r}\vec{\boldsymbol{e}}_\theta & (0 < r < a_1) \\ \vec{\boldsymbol{B}} = \dfrac{\mu\,(I_o - I_1)}{2\pi r}\vec{\boldsymbol{e}}_\theta & (a_1 < r < a_2) \\ \vec{\boldsymbol{B}} = 0 & (r > a_2) \end{cases}$$

A descontinuidade de $H_\theta(r)$ nas superfícies $r = a_1$ e $r = a_2$ deve ser a densidade de corrente superficial nos cilindros de acordo com a equação de Maxwell $\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}} = \vec{\boldsymbol{J}}_c$. De facto confirma-se que $\Delta H_\theta(a_1) = -\frac{I_1}{2\pi\, a_1}$ e $\Delta H_\theta(a_2) = -\frac{I_2}{2\pi\, a_2}$ já que $I_2 = I_o - I_1$.

[1.0] **d)** Desprezando a diferença entre ℓ e h, determine o fluxo de $\vec{\boldsymbol{B}}$ através do retângulo $ABCD$. Use este resultado para determinar o coeficiente de auto-indução L do sistema formado pelos cilindros e o material que enche o espaço entre eles.

R: Considerando que só existe campo dentro dos cilindros, o fluxo pode ser calculado como

$$\Phi = \int\int_S \vec{\boldsymbol{B}}\cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = \int_{-h/2}^{+h/2}\int_{a_1}^{a_2} \vec{\boldsymbol{B}}\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_\theta dr\, dz = \frac{\mu\,(I_o - I_1)}{2\pi} h \log\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$$

A parte deste fluxo devido à corrente que passa nos cilindros é apenas $\dfrac{\mu\, I_1}{2\pi}\, h\, \log\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$ donde

$$L = \frac{\mu}{2\pi} h \log\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$$

[1.0] **e)** Se se abrir o interruptor em X, escreva a equação para a corrente que atravessa os cilindros e determine o tempo característico de queda dessa corrente. (Sugestão: Desenhe o esquema dum circuito elétrico equivalente.) Apresente o resultado em termos de R, R_1, R_2 e L, mesmo que nas alíneas anteriores tenha obtido estas grandezas em termos dos dados do problema.

R: Ao abrir o circuito o campo magnético dentro dos cilindros tende a cair. Pela Lei de Faraday deve então aparecer uma força electromotriz num circuito equivalente a uma série $R_1 + R_2 + L$, pelo que a equação para a corrente será

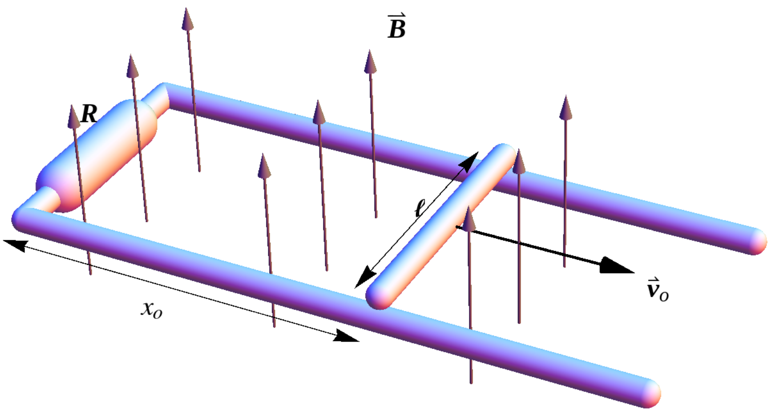
$$(R_1 + R_2)\, I(t) = -L\, \frac{d\, I(t)}{dt}$$

com condições iniciais $I(0) = I_o - I_1$. De qualquer forma, o tempo característico de queda da corrente nos cilindros será $\tau = \frac{L}{R_1 + R_2}$ porque

$$I(t) = (I_o - I_1)\, e^{-\frac{(R_1+R_2)}{L}\, t}$$

Problema 3.

Uma barra condutora de massa m e comprimento ℓ pode deslizar sem atrito sobre os dois braços paralelos de um circuito em U que possui uma resistência R e se encontra assente no plano xy. O sistema está imerso num campo magnético $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$, constante e perpendicular ao plano do circuito. Assumindo que inicialmente a barra se desloca com velocidade $\vec{v} = v_0\vec{e}_x$ e que esta velocidade é mantida constante,



[1.0] **a)** Determine a corrente induzida I no circuito.

R: Considerando que $x(t) = x_o + v_o t$ obtemos $\vec{\boldsymbol{S}}(t) = \ell\, x(t)\vec{\boldsymbol{e}}_z$ e $\Phi(t) = \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \vec{\boldsymbol{S}}(t) = B_o\ell\,(x_o + v_o t)$ pelo que

$$I = \frac{\varepsilon_{im}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\,\Phi}{d\,t} = -\frac{B_o\,\ell\,v_o}{R}$$

[1.5] **b)** Determine a força $\vec{F}_{mag}$ sentida pela barra.

R: Neste caso

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{mag} = \int_{barra} I\,d\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = I\,\ell\,B_o\vec{\boldsymbol{e}}_x = -\frac{{B_o}^2\,\ell^2\,v_o}{R}\vec{\boldsymbol{e}}_x$$

[1.5] **c)** Calcule a potência dissipada por efeito de Joule e a potência da força mecânica $\vec{F}_{mec}$ necessária para manter a barra em movimento uniforme. Comente os resultados.

R: A potência dissipada por efeito de Joule na resistência R é

$$\mathcal{P}_d = R\,I^2 = \frac{{B_o}^2\,\ell^2\,{v_o}^2}{R}$$

o que iguala a potência desenvolvida pela força exterior $\mathcal{P}_{mec} = \vec{\boldsymbol{F}}_{mec} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = -\vec{\boldsymbol{F}}_{mag} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}$. Isto significa que o trabalho realizado pela força mecânica não fica armazenado em forma de energia magnética no sistema, sendo totalmente dissipado por efeito de Joule.

Considere agora que é retirada a força que mantém a barra em movimento constante e se deixa o sistema evoluir a partir daí. Considere $t = 0$ o instante em que se deixa o sistema entregue a si próprio, tendo portanto a barra velocidade inicial $\vec{v}(0) = v_0\vec{e}_x$.

[1.0] **d)** Escreva a equação do movimento da barra e determine o comportamento da sua velocidade $\vec{v}(t)$ em função do tempo.

R: Neste caso temos um movimento definido pela equação de Newton

$$m\frac{d\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}{d\,t} = \overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{mag}(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}}{d\,t} = -\frac{{B_o}^2\,\ell^2}{m\,R}\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$$

donde $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}(t) = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}(0)\, e^{-\frac{{B_o}^2\,\ell^2}{m\,R}\,t}$.

Problema 4.

Considere uma onda plana monocromática que se propaga no vazio. O campo $\vec{\boldsymbol{E}}$ da onda é dado por

$$\begin{cases} \boldsymbol{E_x} & = \cdots \\ \boldsymbol{E_y} & = \boldsymbol{E_0}\,\mathbf{sin}\left[\boldsymbol{\omega t} - |\vec{\boldsymbol{k}}|\left(\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\boldsymbol{y} - \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\boldsymbol{z}\right)\right] \\ \boldsymbol{E_z} & = \boldsymbol{E_0}\,\mathbf{sin}\left[\boldsymbol{\omega t} - |\vec{\boldsymbol{k}}|\left(\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\boldsymbol{y} - \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\boldsymbol{z}\right)\right] \end{cases}$$

[1.0] **a)** Determine a direcção de propagação da onda.

R: Da fase da onda obtém-se

$$k_x = 0, \quad k_y = |\vec{k}|\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad k_z = -|\vec{k}|\frac{1}{\sqrt{2}}$$

portanto

$$\vec{n} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_y - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_z$$

[1.0] **b)** Mostre que a onda é transversal. Explique porque é que este resultado é independente do valor de $\boldsymbol{E_x}$.

R: Para mostrar que a onda é transversal basta mostrar que $\vec{E}\cdot\vec{n} = 0$. Obtemos

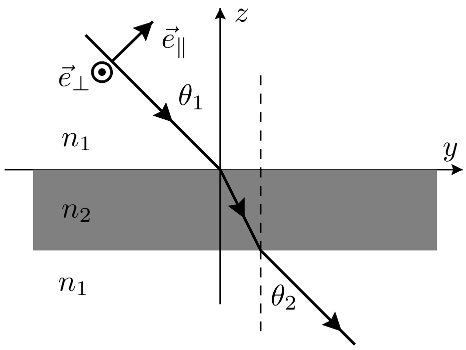
$$\begin{aligned} \vec{E}\cdot\vec{n} =& n_x E_x + n_y E_y + n_z E_z = n_y E_y + n_z E_z \\ =& \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 \sin[\cdots] - \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 \sin[\cdots] = 0 \end{aligned}$$

O resultado é independente do valor de E_x pois a direção de propagação não tem componente segundo $\vec{e}_x$.

[1.0] **c)** Sabendo que a onda tem polarização circular direita, determine a componente $\boldsymbol{E_x}$ do campo elétrico.

R: Como a onda é transversal deverá existir num plano perpendicular à direção de propagação. Esse plano pode ser definido por dois vetores ortogonais

$$\vec{e}_\perp = \vec{e}_x, \quad \vec{e}_\parallel = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_y + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_z$$



Então

$$\begin{aligned}\vec{E} =& E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y + E_z\vec{e}_z = E_x\vec{e}_x + E_0\sin[\cdots](\vec{e}_y + \vec{e}_z))\\ =& E_\perp\vec{e}_\perp + \sqrt{2}E_0\sin[\cdots]\vec{e}_\parallel\end{aligned}$$

Como para terem polarização circular as duas componentes devem diferir por uma fase de $\pi/2$ obtemos

$$\begin{aligned}E_\perp =& \sqrt{2}E_0\cos\left[\omega t - |\vec{k}|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}z\right)\right]\\ E_\parallel =& \sqrt{2}E_0\sin\left[\omega t - |\vec{k}|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}z\right)\right]\end{aligned}$$

onde os sinais foram escolhidos para a onda ter polarização circular direita. Obtemos portanto,

$$E_x = E_\perp = \sqrt{2}E_0\cos\left[\omega t - |\vec{k}|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}z\right)\right]$$

[1.0] **d)** Determine o valor médio do vector de Poynting em função de $\boldsymbol{E_0}$. Sabendo que

$$\boldsymbol{< |\vec{S}| >= \frac{1}{12\pi} \times 10^{-5}}\ \mathrm{W/m^2}$$

determine o valor de $\boldsymbol{E_0}$. Não precisa de usar calculadora. Note que a impedância de onda tem o valor no vazio, $\boldsymbol{Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi\ (\Omega)}$.

R: O vetor de Poynting é dado por

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{Z_0}|\vec{E}|^2\vec{n} = \frac{1}{Z_0}\,2\,E_0^2\,\vec{n}$$

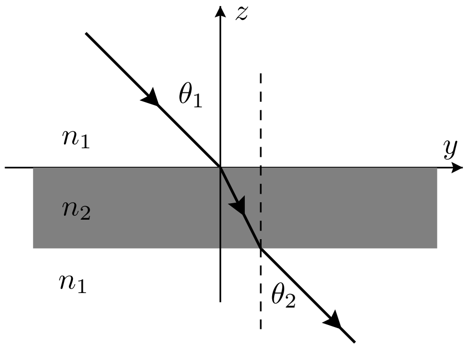
e portanto

$$< |\vec{S}| >= \frac{1}{Z_0}2E_0^2$$

pois o módulo do campo elétrico é constante para polarização circular. Daqui obtemos

$$E_0 = \sqrt{\frac{Z_0 < |\vec{S}| >}{2}} = \sqrt{\frac{120\pi\dfrac{1}{12\pi} \times 10^{-5}}{2}} = \frac{10^{-2}}{\sqrt{2}}\ \mathrm{V/m}$$

A onda incide agora numa lâmina de vidro de faces paralelas, com índice de refração $\boldsymbol{n_2 = 3/2}$, conforme indicado na figura. O meio fora da lâmina é o vazio com $\boldsymbol{n_1 = 1}$.



[1.0] **e)** Determine os ângulos $\boldsymbol{\theta_1}$ e $\boldsymbol{\theta_2}$ indicados na figura. Se não conseguir determinar $\boldsymbol{\theta_1}$ basta determinar $\boldsymbol{\theta_2}$ em função de $\boldsymbol{\theta_1}$. Justifique a resposta.

R: O ângulo $\theta_1 = \pi/4$ como se vê da figura e da direção de propagação da onda. Para determinarmos θ_2 usamos a lei de Snell-Descartes. Se chamarmos θ_r ao ângulo de refração na primeira superfície, esse ângulo será por sua vez o ângulo de incidência na segunda superfície. Assim obtemos

$$\begin{aligned} n_1 \sin\theta_1 =& n_2 \sin\theta_r \\ n_2 \sin\theta_r =& n_1 \sin\theta_2 \end{aligned}$$

e portanto

$$n_1 \sin\theta_1 = n_1 \sin\theta_2 \Rightarrow \sin\theta_1 = \sin\theta_2 \Rightarrow \theta_2 = \theta_1 = \frac{\pi}{4}\ .$$