Exame EeO 18/1/2007

I

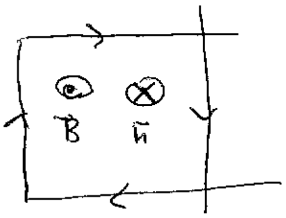
Este problema é igual ao do 1º teste - versão A, cuja resolução está na página da disciplina.

II

a) A posição da barra é dada por

$$x(t) = v_0 t$$

Escolhendo a normal antiparalela a $\vec{B}$, isto é, $\vec{n} = -\vec{e}_z$, a que corresponde o sentido seguinte,



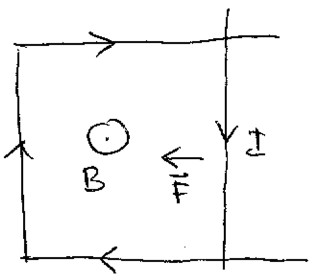
obtemos

$$\Phi(t) = \int_S \vec{B}\cdot\vec{n}\, dS = -B\int_0^d dy \int_0^{v_0 t} dx = -B d v_0 t$$

b) $\mathcal{E} = -\dfrac{d\Phi}{dt} = B d v_0 \Rightarrow I = \dfrac{B d v_0}{R}$

e $I > 0 \Rightarrow$ sentido real é o indicado na figura acima

c) $d\vec{F} = I\, d\vec{l} \times \vec{B}$



$$\vec{F} = -I d B\, \vec{e}_x$$

Para contrariar esta força e manter o movimento com velocidade uniforme é preciso aplicar uma força igual e de sentido contrário, isto é,

$$\vec{F}_a = I d B \vec{e}_x$$

d) Num deslocamento elementar o trabalho é

$$\delta W = \vec{F}_a \cdot d\vec{l}$$

logo a potência é

$$P_a = \frac{dW}{dt} = \vec{F}_a \cdot \vec{v} = I d B v_0 = \frac{B d v_0}{R} d B v_0$$

$$= \frac{(B d v_0)^2}{R}$$

Por outro lado

$$P_J = R I^2 = R \frac{(B d v_0)^2}{R^2} = \frac{(B d v_0)^2}{R} = P_a$$

III

a) Comparando com $\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z)$ obtemos

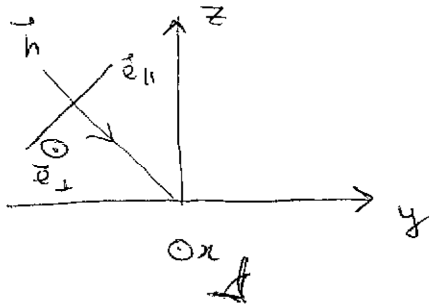
$k_x = 0$; $k_y = |\vec{k}| \frac{1}{\sqrt{2}}$; $k_z = -|\vec{k}| \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\boxed{\vec{n} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_y - \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_z\right)}$$

b) $\lambda f = c$ $\qquad c = 3 \times 10^8 \, m/s$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{6 \times 10^{14}} = 5 \times 10^{-7} \, m = 500 \, nm.$$

c)



$\vec{e}_{\parallel} = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_y + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_z$; $\vec{e}_{\perp} = \vec{e}_x$

Logo

$$\vec{H} = \sqrt{2}\, H_0 \cos[\cdot\ + \delta]\, \vec{e}_x + H_0 \cos[\cdots]\,(\vec{e}_y + \vec{e}_z)$$

$$= \sqrt{2}\, H_0 \cos[\cdots + \delta]\, \vec{e}_\perp + \sqrt{2} H_0 \cos[\cdot\cdot]\, \vec{e}_\parallel \equiv H_\perp \vec{e}_\perp + H_\parallel \vec{e}_\parallel$$

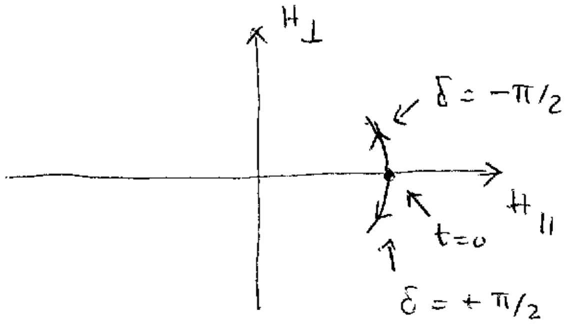
usando

$$\cos\left(\alpha \pm \tfrac{\pi}{2}\right) = \mp \sin\alpha$$

vemos que para ter polarização circular devemos ter $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$.

Então

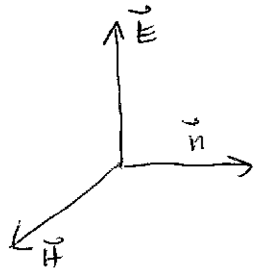
$$\begin{cases} H_\parallel = \sqrt{2}\, H_0 \cos[\cdot\cdot] \\ H_\perp = \mp \sqrt{2}\, H_0 \sin[\cdot\cdot] \end{cases} \quad \text{onde} \quad \begin{cases} - \to \delta = \frac{\pi}{2} \\ + \to \delta = -\pi/2 \end{cases}$$



$\Rightarrow$ polarização circular esquerda

$$\Rightarrow \boxed{\delta = -\pi/2}$$

d)



$$\Rightarrow \vec{E} = Z_0(\vec{H} \times \vec{n}) \quad ; \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

$$\vec{E} = Z_0 \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ +\sqrt{2} H_0 \sin[\cdot\cdot] & H_0\cos[\cdot\cdot] & H_0 \cos[\cdot\cdot] \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = -\sqrt{2}\, Z_0 H_0 \cos[\cdots]\, \vec{e}_x$$

$\delta = -\frac{\pi}{2}$

$$+ H_0 Z_0 \sin[\cdot\cdot]\, \vec{e}_y$$

$$+ H_0 Z_0 \sin[\cdot\cdot]\, \vec{e}_z$$

e

$$\vec{E}\cdot\vec{n} = E_y \frac{1}{\sqrt{2}} - E_z \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \quad ✓$$

e) $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = Z_0 |\vec{H}|^2 \vec{n}$

$$\langle |\vec{S}| \rangle = Z_0 \langle |\vec{H}|^2 \rangle = Z_0 \left[\langle H_x^2 \rangle + \langle H_y^2 \rangle + \langle H_z^2 \rangle \right]$$

$$= Z_0 \left[\frac{1}{2} 2 H_0^2 + \frac{1}{2} H_0^2 + \frac{1}{2} H_0^2 \right] = 2 Z_0 H_0^2$$

onde se usou

$$\langle \sin^2 \omega t \rangle = \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}.$$

IV

a) Na entrada $i = 0$. logo aplicando a lei de Snell/Descartes

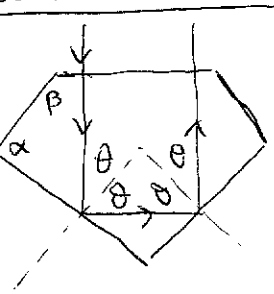
$n_1 \sin i = n_2 \sin r \Rightarrow r = 0 \Rightarrow$ o raio continua na mesma direcção $\perp$ à superfície superior

b) Vamos calcular o ângulo crítico para a reflexão total no diamante

$$n_D \sin i_c = \underset{\substack{\uparrow \\ n_{ar}}}{1} \times \sin \pi/2 = 1$$

logo $i_c = \arcsin\left(\frac{1.}{2.4}\right) = 24.6°$

<u>Prisma do lado esquerdo</u>



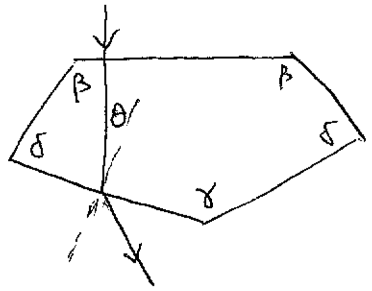
da Figura resulta que

$$\frac{\pi}{2} - \theta = \pi - \beta \Rightarrow \theta = \beta - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Como $\theta > i_c$ temos reflexão total

o mesmo se passa na outra face $\Rightarrow$ raio sai outra vez paralelo ao de entrada sem sair "por baixo".

Prisma lado Direito



Queremos saber θ. Do quadrilátero do lado esquerdo temos

$$\frac{\pi}{2} - \theta + \beta + \delta + \frac{\pi}{2} = 2\pi \Rightarrow \boxed{\theta = \delta - \frac{\pi}{4}}$$

Temos que determinar δ. Do polígono de cinco lados temos

$$2\beta + 2\delta + \gamma = 3\pi \Rightarrow \delta = \frac{\pi}{3}$$

logo

$$\theta = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} = 15^\circ < i_c$$

Não há reflexão total e o raio tem a trajectória indicada

c) Devem ser cortados com a secção do lado esquerdo para que toda a luz que entra na face superior volte a sair e aumentar assim o brilho do anel.

V

Tomemos o exemplo do exercício II. Como o fluxo está a aumentar com o tempo (pois a área aumenta) a corrente induzida deve ser tal que crie um campo $\overline{B}'$ de sentido oposto para "tentar" contrariar a mudança. Isto corresponde ao sentido encontrado.