Exame de Electromagnetismo e Óptica

Cursos de Química, Eng. Química, Eng. Biológica e Eng. do Ambiente

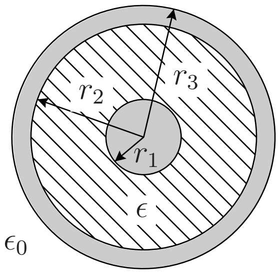
$2^{\underline{a}}$ Época – 3/2/2007

Não é permitido usar máquina de calcular

Duração do exame: 3 horas

I (5 valores)

Considere dois **condutores esféricos**, concêntricos com a geometria indicada na figura e colocados no vazio. O condutor interior tem carga total $q_1 > 0$ enquanto que o condutor exterior tem carga total q_2. Sabe-se que $q_1 + q_2 > 0$. O espaço entre os condutores está preenchido com um dieléctrico linear, homogéneo e isótropo de permitividade ϵ.



Calcular:

a) O campo eléctrico e o potencial no exterior do sistema em função de q_1 e q_2.

b) O campo eléctrico e o potencial electrostático no espaço entre os condutores.

c) A densidade de carga de polarização, σ_1', na superfície interior do dieléctrico ($r = r_1$). Determine também a densidade de carga livre, σ_1, na superfície do condutor interior. Relacione estas duas densidades com a discontinuidade da componente normal do vector $\vec{E}$ em $r = r_1$, isto é, mostre que se tem

$$E_{n_2} - E_{n_1} = \frac{1}{\epsilon_0}\left(\sigma_1 + \sigma_1'\right)$$

d) Faça um gráfico aproximado do campo eléctrico e do potencial para $0 < r < \infty$.

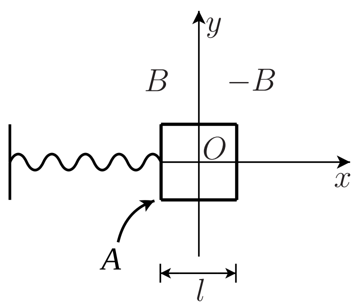
II (5 valores)

Considere uma espira rígida condutora com a forma dum quadrado de lado l assente no plano xy dum referencial. Nesse referencial existe um campo de indução magnética $\vec{B} = B_z\vec{e}_z$ **uniforme** e tal que $B_z = B$ para $x < 0$ e $B_z = -B$ para $x > 0$, conforme indicado na figura. A espira está presa a uma mola e pode oscilar livremente, sem atrito, no plano xy, na direcção do eixo dos x, com frequência angular ω e amplitude $l/4$. No instante inicial ($t = 0$) a espira encontra-se na posição indicada na figura (com o centro na origem do referencial) e a deslocar-se para a **direita**.

a) Verifique que as coordenadas do ponto A se podem escrever

$$x_A = -\tfrac{l}{2} + \tfrac{l}{4}\sin(\omega t)$$
$$y_A = -\tfrac{l}{2}$$

isto é, que são compatíveis com as condições do problema.



b) Determine o fluxo magnético através da espira em função do tempo.

c) Sabendo que a resistência da espira é R, determine a corrente induzida na espira e discuta o seu sinal no intervalo $0 < \omega t < \pi/2$.

III (5 valores)

Uma onda electromagnética plana propaga-se num meio não magnético ($\mu_r = 1$). O seu campo $\vec{E}$ é dado por

$$\begin{cases} E_x = E_0 \cos\left[\omega t - |\vec{k}|\,(\alpha x + \beta z)\right] \\ E_y = E_0 \sin\left[\omega t - |\vec{k}|\,(\alpha x + \beta z) + \delta\right] \\ E_z = E_0 \cos\left[\omega t - |\vec{k}|\,(\alpha x + \beta z)\right] \end{cases} ,$$

onde $\omega = 2 \times 10^8\,|\vec{k}|$ (rad/s), $\beta > 0$.

Determine:

a) as constantes (sem dimensões), α e β, de modo a que a expressão para $\vec{E}$ corresponda de facto a uma onda plana electromagnética.

Nota: α e β não são independentes pois $|\vec{k}| \equiv \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$.

b) a direcção e o sentido da propagação da onda;

c) o índice de refracção do meio;

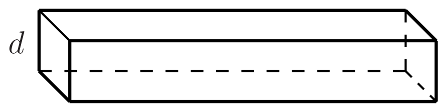
d) o(s) valor(es) de δ para que a polarização seja linear.

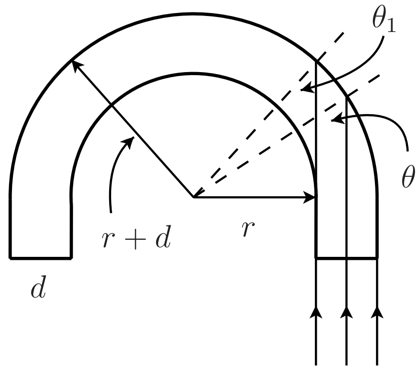
e) o valor médio do vector de Poynting em funcão de E_0, do índice de refracção n e da impedância de onda $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$. Mostre que não depende de δ.

IV (3 valores)

Considere uma fibra óptica com índice de refracção n e secção quadrada de lado d, conforme indicado na figura (em cima). Como sabe, as fibras ópticas conduzem a luz usando o fenómeno da reflexão total. Um dos problemas que se coloca na sua utilização é saber se essa propriedade se mantém quando as fibras são dobradas.

Para estudar o que se passa, considere a situação representada na figura (em baixo). A fibra foi dobrada fazendo *meia volta* com um raio interior de r e um raio exterior de $r+d$. Considere que a luz incide paralelamente ao eixo da fibra como indicado.





a) Determine o ângulo de incidência θ_1 na superfície interior da fibra com raio $r + d$ (ver figura) em função de r e d.

b) Mostre que se o raio que tem o ângulo θ_1 tiver reflexão total, então todos os outros que lhe sejam paralelos à entrada da fibra também terão reflexão total.

c) Determine o valor de $d = d_c$ a partir do qual todos os raios que incidem paralelamente ao eixo da fibra têm reflexão total nas suas paredes, e portanto são conduzidos sem perdas para a outra extremidade. Esse valor é um valor mínimo ou máximo, isto é, deverá ser $d \geq d_c$ ou $d \leq d_c$?

V (2 valores)

Considere um condutor carregado, com uma densidade de carga em superfície σ, colocado no vácuo. O condutor tem uma forma arbitrária. Usando as condições na fronteira para as componentes normais e tangenciais do campo $\vec{E}$ através duma superfície electrizada, determine o campo $\vec{E}$ à superfície do condutor, do lado de fora.