PARTE 2

Electrostática

2.1 Campo Eléctrico de Distribuições de Cargas

[B.1] Calcule o campo eléctrico $\mathbb{E}$ criado por uma linha recta infinita, carregada uniformemente com uma densidade linear de carga $\lambda\left(\frac{C}{m}\right)$, num ponto à distância d da linha.

[B.2] Considere agora que o fio do problema anterior é finito e de comprimento h.

(a) Calcule o campo num ponto $\mathcal{P}$ à distância d do fio e equidistante dos seus extremos.

(b) Calcule ainda a lei de variação de $\mathbb{E}$ nos dois casos seguintes: $d \ll l$ ou $d \gg h$.

(Resp:) (a) $\mathbb{E}(d) = \dfrac{\lambda \sin(\theta_1)}{2\pi\varepsilon_o d}\vec{\mathbb{e}}_\rho$ onde $\sin(\theta_1) = \dfrac{h/2}{\sqrt{d^2 + (h/2)^2}}$

(b) $\mathbb{E}(d \ll l) \approx \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o d}\vec{\mathbb{e}}_\rho \quad \left(\dfrac{V}{m}\right)$; $\qquad \mathbb{E}(d \gg h) \approx \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o d^2}\vec{\mathbb{e}}_\rho \quad \left(\dfrac{V}{m}\right)$

[B.3] Dada uma barra estreita de comprimento h, carregada com carga Q uniformemente distribuída, determine a força que esta barra exerce sobre uma carga pontual e igual Q, situada à distância a de uma das extremidades da barra, no prolongamento desta (eixo $\vec{\mathbb{e}}_z$).

(Resp:) (a) $\mathbb{F} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{Q^2}{a(a+h)}$

[B.4] Em relação ao problema anterior, calcular a posição do ponto onde se anula o campo elétrico $\mathbb{E}$ (sobre a linha que une a barra à carga pontual) .

(Resp:) (a) $d = \dfrac{a^2}{2a+h}$ (distância à extremidade da barra)

[B.5] Partindo da expressão para o potencial $\varphi(\mathbb{r})$ dum dipolo eléctrico (momento dipolar $\mathbb{p}$), calcule as componentes do campo $\mathbb{E} = E_x\vec{\mathbb{e}}_x + E_y\vec{\mathbb{e}}_y + E_z\vec{\mathbb{e}}_z$. Mostre que estas podem ser obtidas pela projecção, sobre os eixos coordenados, do vector

$$\mathbb{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o r^5}\left(3\,(\mathbb{p}\cdot\mathbb{r})\,\mathbb{r} - r^2\mathbb{p}\right)$$

[B.6] Considere uma espira circular de raio R, situada no plano $(x-y)$ e carregada uniformemente com carga total $+Q$. No seu centro está colocada uma carga $-Q$.

(a) Calcule o campo eléctrico $\mathbb{E}$ e o potencial φ num ponto $\mathcal{P}$ situado sobre o eixo $\vec{\mathbb{e}}_z$ da espira, à distância z da mesma.

(b) Determine a lei de variação do potencial para distâncias tais que $z \gg R$.

(Resp:) (a) $$\mathbb{E}_{\mathcal{P}} = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o}\left(\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}} - \frac{1}{z^2}\right)\vec{\mathbb{e}}_z \, \left(\frac{V}{m}\right)$$
$$\varphi_{\mathcal{P}} = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o}\left(\frac{1}{(R^2+z^2)^{1/2}} - \frac{1}{z}\right)\,(V)$$
(b) $$\varphi_{\mathcal{P}}(z \gg R) = -\frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o}\left(\frac{R^2}{2\,z^3}\right)\,(V)$$

[B.7] Dadas três cargas pontuais q_1, q_2, q_3 separadas por distâncias $r_{ij} = |\mathbb{r}_i - \mathbb{r}_j|$ entre si $(i, j = 1, 2, 3)$, escreva a expressão para o trabalho que é necessário realizar para trocar as posições de duas das cargas, por exemplo q_1 e q_2.

(Resp:) (a) $$W = \frac{q_3}{4\pi\,\varepsilon_o}\left(q_1 - q_2\right)\left(\frac{1}{r_{23}} - \frac{1}{r_{13}}\right)$$

[B.8] Dado um disco de raio a, uniformemente carregado com densidade superficial de carga σ, calcule

(a) O campo eléctrico $\mathbb{E}$ num ponto $\mathcal{P}$ situado à distância z do disco, sobre uma linha perpendicular passando pelo centro do mesmo.

(b) Mostre que quando $z \to 0$, se tem $\mathbb{E} \to \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$, tal como no plano infinito.

(Resp:) (a) $$\mathbb{E}(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\vec{\mathbb{e}}_z$$

[B.9] Duas cargas esféricas $q_1 = 4\,\mu C$ e $q_2 = -2\,\mu C$, com massas $m_1 = m_2 = 101, g$, estão à distância de $15\,cm$ uma da outra. Partindo do repouso, qual é a sua velocidade relativa quando estiverem à distância de $5\,cm$?

[B.10] Uma semiesfera de raio R encontra-se uniformemente electrizada em superfície, com uma densidade de carga dada por $\sigma\ \left(\frac{C}{m^2}\right)$. Calcule o campo eléctrico no centro da esfera.

(Resp:) (a) $$E = \frac{\sigma}{4\epsilon_o}$$

[B.11] Temos uma esfera unifornemente carregada em superfície, com $\sigma\ \left(\frac{C}{m^2}\right)$ e um ponto $\mathcal{P}$ situado no seu interior. Mostre que o campo eléctrico $\mathbb{E}(\mathcal{P})$ em $\mathcal{P}$ é nulo, qualquer que seja a posição de $\mathcal{P}$.

[B.12] O espaço compreendido entre dois planos infinitos e paralelos à cota $z = +\frac{a}{2}$ e $z = -\frac{a}{2}$ está preenchido uniformemente com uma carga de densidade $\rho\ \left(\frac{C}{m^3}\right)$.

(a) Calcule o campo electrostático em qualquer ponto $\mathcal{P}$ exterior à distribuição.

(b) Repita o cálculo para um ponto $\mathcal{P}'$ interior à mesma.

(Resp:) (a) $\mathbb{E}\left(|z| > \frac{a}{2}\right) = sgn(z)\ \dfrac{\rho\, a}{2\epsilon_o}\ \vec{\mathbb{e}}_z$

(b) $\mathbb{E}\left(|z| < \frac{a}{2}\right) = sgn(z)\ \dfrac{\rho\, z}{\epsilon_o}\ \vec{\mathbb{e}}_z$

[B.13] Num Osciloscópio de Raios Catódicos os electrões saem do cátodo com uma velocidade v_o (paralela ao eixo dos xx, sofrendo depois uma deflecção ao entrar, em $x = 0$, numa região de comprimento l onde existe um campo eléctrico homogéneo $\mathbb{E}_d$ (paralelo ao eixo dos zz e apontando para baixo). Seguidamente percorrem espaço livre de campos até embaterem num alvo vertical na posição $x = L$. Calcule a deflexão total $d = \Delta z$ sofrida pelos electrões.

(Resp:) (a) $d = \dfrac{e\, E_d}{m_e v_o^2}\left(L - \dfrac{l}{2}\right) l$

[B.14] Duas esferas condutoras de raios R_1 e R_2 apresentam uma distância $r \gg R_1, R_2$ entre os respectivos centros, de forma que podemos desprezar a influência eléctrica entre as esferas. Uma delas tem carga q e a outra não tem carga. Liguemos as esferas por um fio condutor. Calcule a distribuição final de cargas q_1, q_2 e os potenciais φ_1, φ_2 de cada esfera.

[B.15] Dois condutores esféricos concêntricos, de raio R_1 o mais pequeno, e raios R_2 (interior) e R_3 (exterior) o maior, encontram-se a potenciais φ_1, φ_2. Calcule:

(a) A carga q_1 da esfera interior e a carga q_2 na superfície interna do condutor exterior.

(b) O campo eléctrico $\mathbb{E}(r)$ e o potencial escalar $\varphi(r)$ no espaço entre os condutores

[B.16] Uma esfera de raio R está carregada uniformemente. A carga total da esfera é Q. Calcule a expressão do campo eléctrico no interior e no exterior da esfera.

(Resp:) (a) $\mathbb{E}_{int} = \dfrac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o}\dfrac{r}{R^3}\ \vec{\mathbb{e}}_r\ \left(\dfrac{V}{m}\right)$; $\mathbb{E}_{ext} = \dfrac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o}\dfrac{1}{r^2}\ \vec{\mathbb{e}}_r\ \left(\dfrac{V}{m}\right)$

[B.17] Repita o problema anterior no caso em que a densidade de carga na esfera obedece a $\rho = A\, r\ \left(\frac{C}{m^3}\right)$, com A constante. Exprima os resultados em função da carga total Q e do raio R

(Resp:) (a) $\mathbb{E}_{int} = \dfrac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o}\dfrac{r^2}{R^4}\ \vec{\mathbb{e}}_r\ \left(\dfrac{V}{m}\right)$