Aulas Práticas

Electromagnetismo e Optica (LEIC)

1ºSem. 2007/2008

http://fisica.ist.utl.pt/~leic_f2

Prof. Amaro Rica da Silva

http : // centra.ist.utl.pt / ~amaro

2 ª Semana, 24 – 28 Setembro

19 : 26 : 31

Definições iniciais

Definições Globais

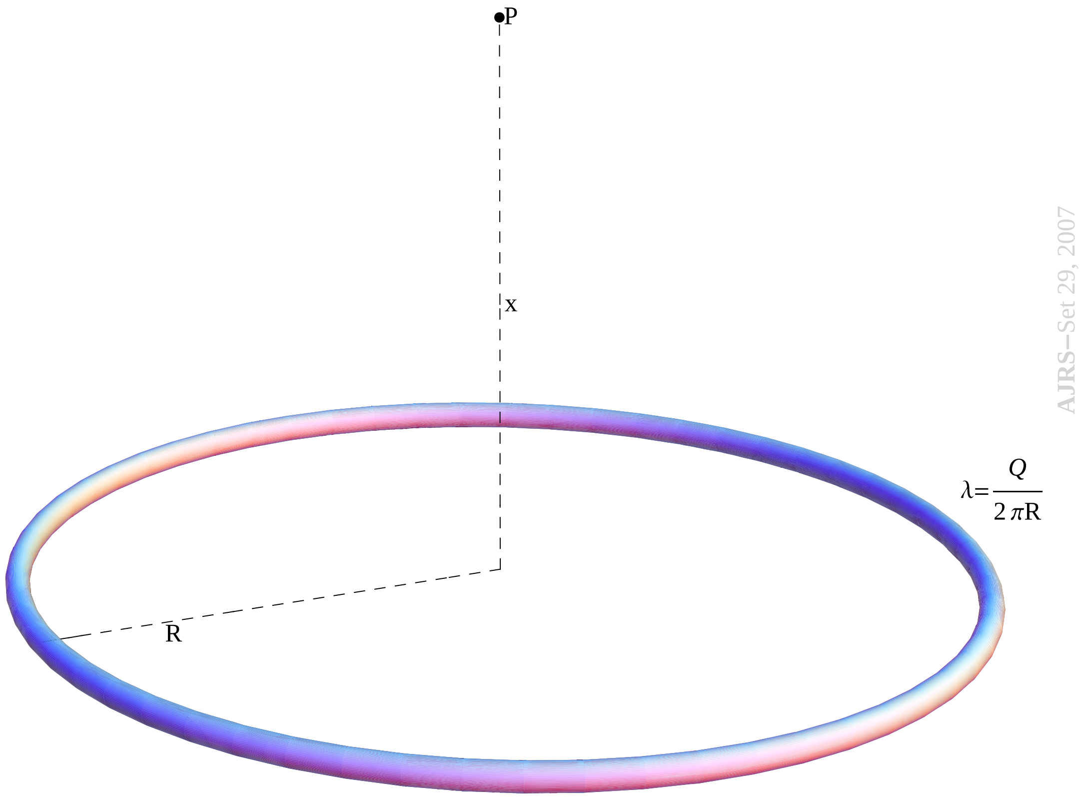
Definições Gráficas

Definições Texto

Serie II, Problema 2.1

Problema 2.1

Um anel de raio R tem uma carga eléctrica Q distribuída uniformemente. Calcular o campo eléctrico $\vec{E}$ num ponto P que está a uma distância x do centro do anel e no eixo desse anel.



SUGESTÃO a) – Antes de encetar qualquer cálculo explore as simetrias da distribuição de cargas e deduza a forma (direcção e sentido) que o campo deve ter no ponto em questão e noutros pontos do espaço.

SUGESTÃO b) – Fraccione a distribuição de carga em pedaços infinitesimais para serem aproximados por uma carga pontual e use a Lei de Coulomb para calcular a sua contribuição para o campo total.

SUGESTÃO c) – Use a linearidade do campo eléctrico para somar as diferentes contribuições infinitesimais.

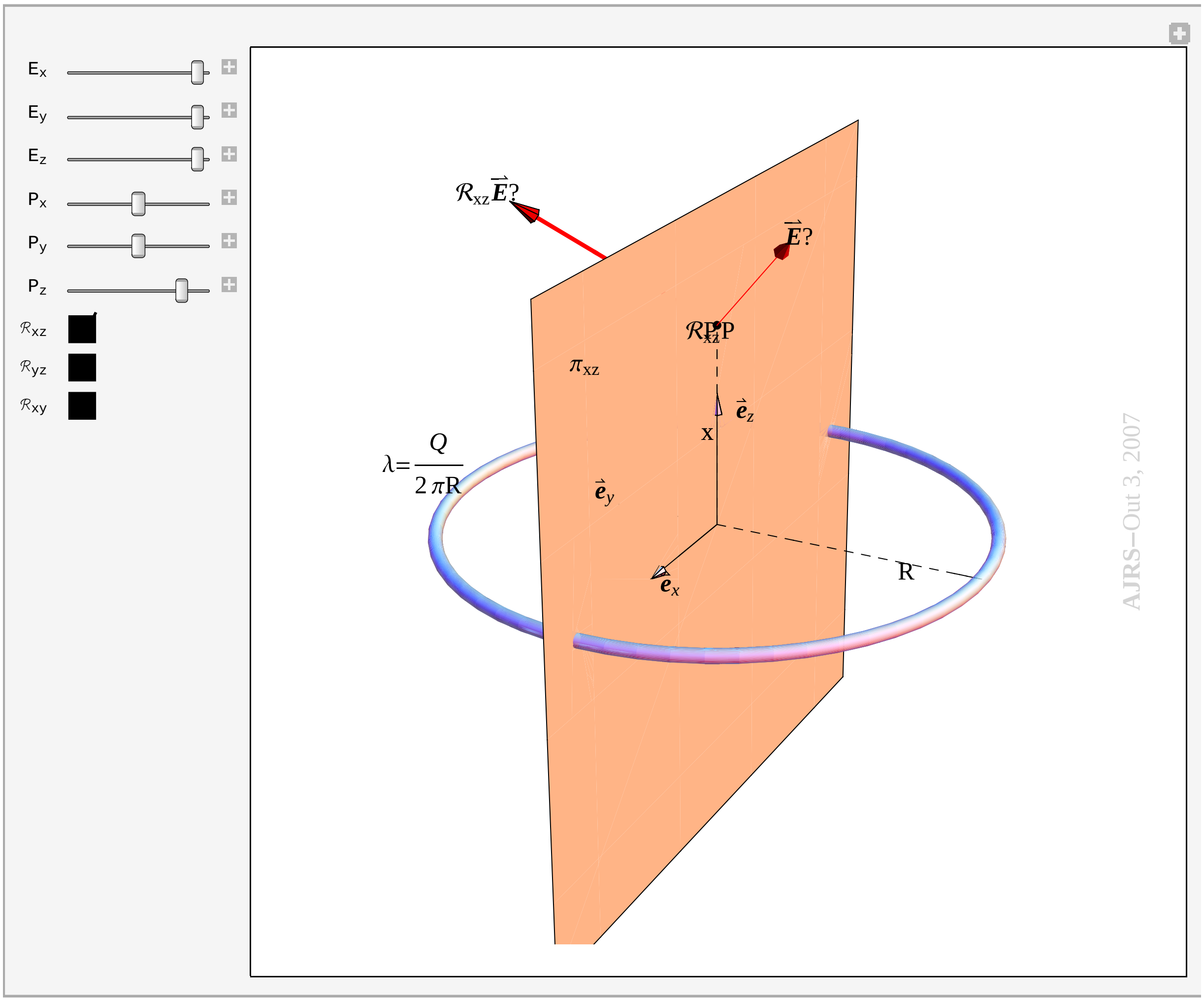
Serie II, Problema 2.1

- Na figura, $\mathcal{R}_{xz}$, $\mathcal{R}_{yz}$ e $\mathcal{R}_{xy}$ representam reflexões nos planos π_{xz}, π_{yz} e π_{xy}, respectivamente.

QUESTÃO a) – Verifique que a distribuição uniforme de carga no anel é invariante para estas reflexões, mas o único tipo de vector no ponto P sobre o eixo que fica invariante para ambas as operações é um vector vertical.

QUESTÃO b) – Por um raciocíno análogo deduza o valor do campo no centro do anel. Que planos de simetria tem que usar?

QUESTÃO c) – Como deve ser o campo no plano horizontal π_{xy}, dentro e fora do perímetro do anel?



Serie II, Problema 2.1

Solução

Lei de Coulomb — o campo criado na posição $\vec{r}$ por uma carga q na posição $\vec{r}_q$ é dado pela expressão:

$$\vec{E}\left[\vec{r},\, q,\, \vec{r}_q\right] = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_o}\,\frac{q}{\left|\vec{r}-\vec{r}_q\right|^2}\,\vec{u}_{\vec{r}-\vec{r}_q} \equiv \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_o}\,\frac{q}{\left|\vec{r}-\vec{r}_q\right|^3}\left(\vec{r}-\vec{r}_q\right);$$

- Definição operacional

$$\vec{E}[x\_,\, q\_,\, y\_] := \frac{q}{4\,\pi\,\epsilon_o}\left(\frac{x-y}{((x-y).(x-y))^{3/2}}\right)$$

- Constantes electrostáticas

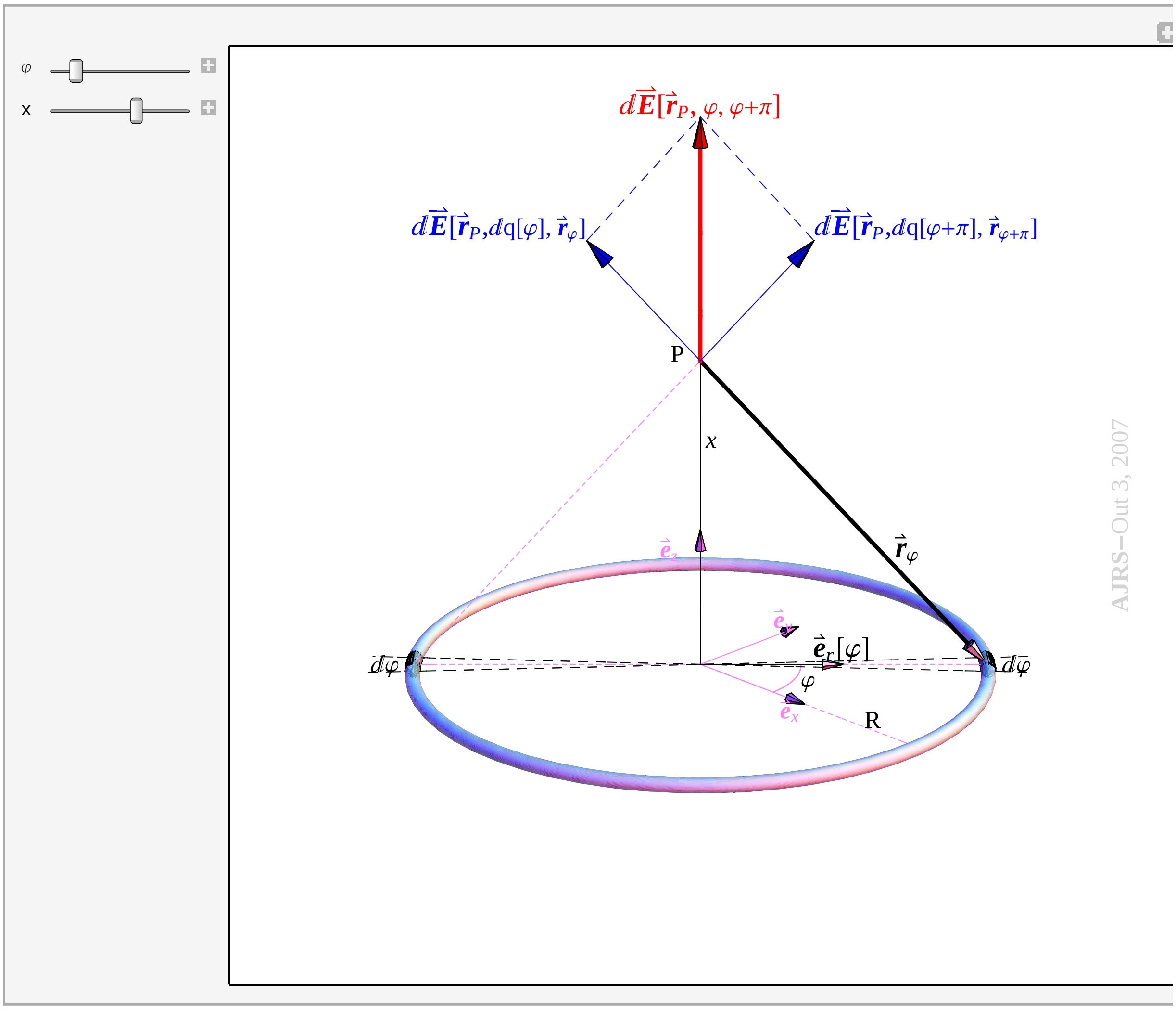
$$\text{SIUnits} = \begin{pmatrix} q_e \to 1.602176462\times 10^{-19} & (*\ \text{Coulomb}\ *) & \textit{Carga do Electrão} \\ \epsilon_o \to 8.854187817\times 10^{-12} & \left(*\ \frac{\text{Ampere Segundo}}{\text{Metro Volt}}\ *\right) & \textit{Permitividade eléctrica do vácuo.} \\ \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_o} \to 10^{-7}\times c^2 & \left(*\approx 9\times 10^9\ \frac{\text{Metro Volt}}{\text{Ampere Segundo}}\ *\right) & \textit{Constante Eléctrica} \\ c \to 299\,792\,458 & \left(*\ \frac{\text{Metro}}{\text{Segundo}}\ *\right) & \textit{Velocidade da luz no vácuo.} \end{pmatrix}^{T}[[1]];$$

Princípio de superposição — o campo criado na posição $\vec{r}$ por várias cargas é o somatório dos campos criados na posição $\vec{r}$ por cada carga separadamente.

$$\vec{E}[\vec{r}] = \sum_{i=1}^{N}\vec{E}\left[\vec{r},\, q_i,\, \vec{r}_i\right] \equiv \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_o}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|^3}\left(\vec{r}-\vec{r}_i\right);$$

Serie II, Problema 2.1

- Começamos por escolher um sistema de referência adequado (origem + versores de base). Neste caso muito particular podemos colocar a origem na posição do ponto P. Se orientarmos o eixo do anel na direcção $\vec{e}_z$, podemos usar o ângulo φ para parametrizar o anel.



Serie II, Problema 2.1

▪ Versores auxiliares

- Colocamos a origem em P e definimos o ângulo azimutal φ na horizontal relativamente a $\vec{e}_x$.

- O versor que aponta, na horizontal, do centro do anel para o segmento anelar $R\, d\varphi$ que contém a carga dq parametrizada por φ é

$\vec{\mathbf{e}}_r[\varphi\_] := \text{Cos}[\varphi]\, \vec{\mathbf{e}}_x + \text{Sin}[\varphi]\, \vec{\mathbf{e}}_y;$

▪ Cargas e posições

$\vec{\mathbf{r}}_P = \vec{\mathbf{O}}$ *colocamos a origem no ponto P.* ;

$\vec{\mathbf{r}}_{\varphi\_} := R\, \vec{\mathbf{e}}_r[\varphi] - x\, \vec{\mathbf{e}}_z$ *posição da carga $dq[\varphi]$ relativamente à origem em P .* ;

;

$\left|\vec{\mathbf{r}}_P - \vec{\mathbf{r}}_\varphi\right| \equiv \left|\vec{\mathbf{r}}_\varphi\right| == \sqrt{R^2 + x^2}$ *distância da carga $dq[\varphi]$ ao ponto P.* ;

$\vec{\mathbf{u}}_{\vec{\mathbf{r}}_P - \vec{\mathbf{r}}_\varphi} = \frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}} \left(-R\, \vec{\mathbf{e}}_r[\varphi] + x\, \vec{\mathbf{e}}_z\right)$ *versor do vector $\vec{\mathbf{r}}_P - \vec{\mathbf{r}}_\varphi$.* ;

- Se a carga Q está uniformemente distribuída pelo anel de raio R, a densidade linear de carga será $\lambda \equiv \frac{dQ}{d\ell} = \frac{Q}{2\pi R}$, i.e a carga a dividir pelo perímetro do anel.

$\lambda = \dfrac{Q}{2\,\pi\,R} \quad (* \ \frac{C}{m} \ *);$

- Qualquer segmento angular $d\varphi$ de anel terá então sempre a mesma carga $dq[\varphi] = dq = \lambda\, R\, d\varphi$.

$dq = \lambda\, R\, d\varphi == \dfrac{Q}{2\,\pi}\, d\varphi \quad (*\ C\ *);$

Serie II, Problema 2.1

Campo resultante

- Emparelhando segmentos do anel diametralmente opostos obtemos contribuições $d\vec{E}[\vec{r}_P, \varphi]$ para o campo em P que só têm componente segundo $\vec{e}_z$.

$$d\vec{E}[\vec{r}_P, dq, \vec{r}_\varphi] = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{dq}{(R^2+x^2)^{3/2}} \left(-R\,\vec{e}_r[\varphi] + x\,\vec{e}_z\right)$$

;

$$d\vec{E}[\vec{r}_P, dq, \vec{r}_{\varphi+\pi}] = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{dq}{(R^2+x^2)^{3/2}} \left(-R\,\vec{e}_r[\varphi+\pi] + x\,\vec{e}_z\right)$$

- Os versores auxiliares $\vec{e}_r[\varphi]$ e $\vec{e}_r[\varphi+\pi]$ são simétricos

$$\vec{e}_r[\varphi+\pi] == -\vec{e}_r[\varphi]$$

- Os elementos de carga $dq = \lambda R\, d\varphi = \frac{Q}{2\pi}\, d\varphi$ nas posições parametrizadas por φ e $\varphi + \pi$ geram assim um campo

$$d\vec{E}[\vec{r}_P, \varphi] == d\vec{E}[\vec{r}_P, dq, \vec{r}_\varphi] + d\vec{E}[\vec{r}_P, dq, \vec{r}_{\varphi+\pi}] == \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{\frac{Q}{2\pi} d\varphi}{(R^2+x^2)^{3/2}}\, 2x\,\vec{e}_z$$

- A soma das contribuições de todos estes $N = \frac{\pi}{d\varphi}$ pares de cargas dá o campo total. No limite $d\varphi \to 0$ a soma torna−se o integral para $0 \leq \varphi \leq \pi$

$$\vec{E}[\vec{r}_P] == \int_0^\pi d\vec{E}[\vec{r}_P, \varphi] == \int_0^\pi \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{\frac{Q}{2\pi}}{(R^2+x^2)^{3/2}}\, 2x\,\vec{e}_z\, d\varphi == \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Q\,x}{(R^2+x^2)^{3/2}}\, \vec{e}_z$$

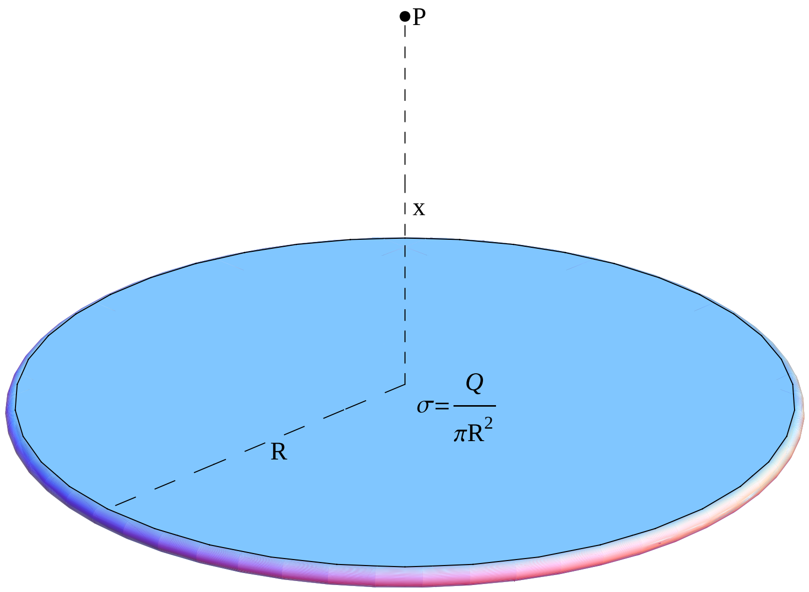
QUESTÃO d) – Qual o valor do campo no centro do anel?

QUESTÃO e) – Como deve comportar−se uma carga largada no plano do anel?

Serie II, Problema 2.3

Prolema 2.3

Um disco de raio R tem uma carga Q distríbuida uniformemente. Calcular o campo eléctrico $\vec{E}$ num ponto P que está a uma distância x do centro da esfera. (Usar o resultado do problema do disco.)

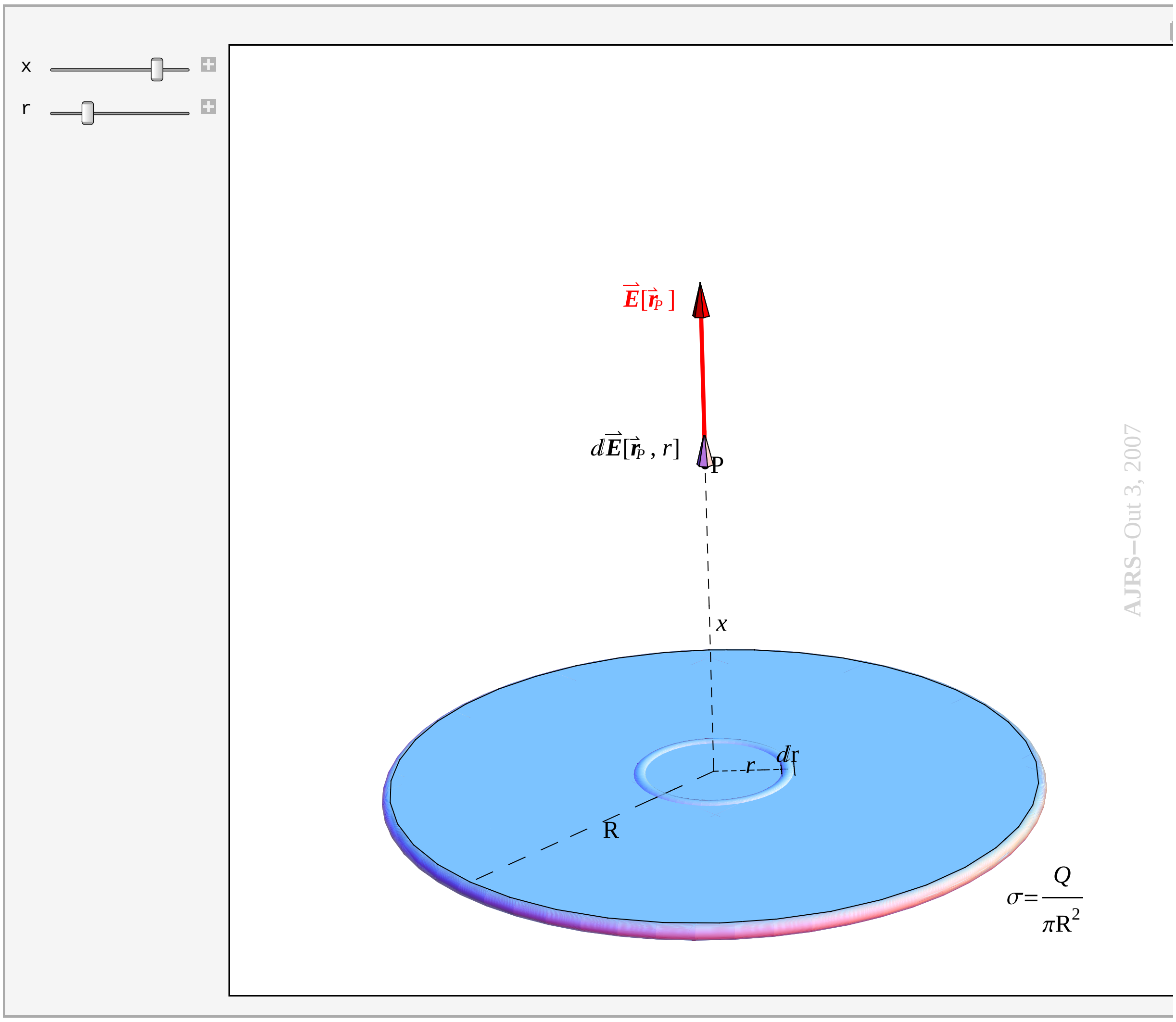


Serie II, Problema 2.3

Solução

- Vamos subdividir o disco em anéis concêntricos de espessura dr e raio variável r entre 0 e R.

- O campo $d\vec{E}[\vec{r}_P, r]$ gerado pela carga $dq[r]$ distribuída uniformemente em cada um destes anéis é vertical em qualquer ponto $\vec{r}_P$ do eixo de simetria, tal como calculado no problema anterior.



- A soma destas contribuições para todos os $N = \frac{R}{dr}$ anéis que preenchem o disco é, no limite em que $dr \to 0$, o campo total do disco em $\vec{r}_P$.

$$\vec{E}[\vec{r}_P] \approx \sum_{n=0}^{N} d\vec{E}[\vec{r}_P, n\,dr] \xrightarrow{dr\to 0} \vec{E}[\vec{r}_P] == \int_0^R d\vec{E}[\vec{r}_P, r]$$

Serie II, Problema 2.3

Cargas e Posições

- Densidade superficial de carga $\sigma = \frac{dQ}{dS}$ duma distribuição uniforme é a carga total a dividir pela área onde se distribui.

$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2};$$

- Um segmento anelar de raio $0 < r \leq R$ e espessura dr contém a carga $dq[r] = \sigma\, dS[r]$.

$$dq[r] = \sigma\, 2\,\pi\, r\, dr = \sigma\left(\pi\,(r + dr)^2 - \pi\, r^2\right)$$

Campo dum anel de raio *r*

- O campo deste anel de carga dq num ponto do eixo a distância x do seu centro é agora $d\vec{E}\left[\vec{r}_P, r\right]$ como obtido no problema anterior com as substituições $R \to r$ e $Q \to dq[r]$:

$$d\,\vec{\mathbf{E}}\left[\vec{\mathbf{r}}_P, r\right] = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_o}\,\frac{x\, dQ[r]}{\left(r^2 + x^2\right)^{3/2}}\,\vec{\mathbf{e}}_z = \frac{1}{2\,\epsilon_o}\,\frac{\sigma\, x\; r\, dr}{\left(r^2 + x^2\right)^{3/2}}\,\vec{\mathbf{e}}_z = \frac{Q}{2\,\pi\,\epsilon_o\, R^2}\,\frac{x\, r}{\left(r^2 + x^2\right)^{3/2}}\,\vec{\mathbf{e}}_z\, dr$$

Campo total

- O campo total $\vec{E}[\vec{r}_P]$ é a soma de todas estas contribuições quando r vai de $r = 0$ até $r = R$.

$$\vec{\mathbf{E}}[\vec{\mathbf{r}}_P] = \int d\vec{\mathbf{E}}\left[\vec{\mathbf{r}}_P, r\right] = \int_0^R \frac{Q}{2\,\pi\,\epsilon_o\, R^2}\,\frac{x\, r}{\left(r^2 + x^2\right)^{3/2}}\,\vec{\mathbf{e}}_z\, dr \;=\; \frac{Q}{2\,\pi\,\epsilon_o\; R^2}\left(\text{Sign}[x] - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right)\vec{\mathbf{e}}_z$$

Serie II, Problema 2.3

- Cálculo do integral anterior:

NB : $\dfrac{Q\,x}{2\,\pi\,\epsilon_0\,R^2}\displaystyle\int_0^R \frac{r}{(r^2+x^2)^{3/2}}\,dr$ $\quad r\,dr = \dfrac{1}{2}\,d(r^2+x^2)$ *para x constante.* ;

$$\longrightarrow \quad \frac{Q\,x}{2\,\pi\,\epsilon_0\,R^2}\int_{x^2}^{R^2+x^2}\frac{\frac{1}{2}}{(r^2+x^2)^{3/2}}\,d(r^2+x^2)$$

a nova variável de integração é $r^2+x^2=w.$;

$$\longrightarrow \quad \frac{Q\,x}{4\,\pi\,\epsilon_0\,R^2}\int_{x^2}^{R^2+x^2}\frac{1}{w^{3/2}}\,dw$$

a primitiva de $w^{-3/2}$ *é* $-2\,w^{-1/2}$. ;

$$\longrightarrow \quad \frac{Q\,x}{4\,\pi\,\epsilon_0\,R^2}\left(\frac{2}{\sqrt{x^2}}-\frac{2}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)$$

note que $\dfrac{x}{\sqrt{x^2}} = \dfrac{x}{|x|} = Sign[x].$;

■ Exercícios

No limite em que P está muito perto da superfície do disco, ou em que $R \gg x$, mostre que o campo no centro do disco é simplesmente $\vec{E}[O_\pm] = \pm\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_z$, onde $\pm$ representa o lado do disco em que o campo é considerado.

Explique porque é que o campo no centro do disco é diferente de zero, quando vimos que a contribuição de cada anel para o campo no seu centro é zero.

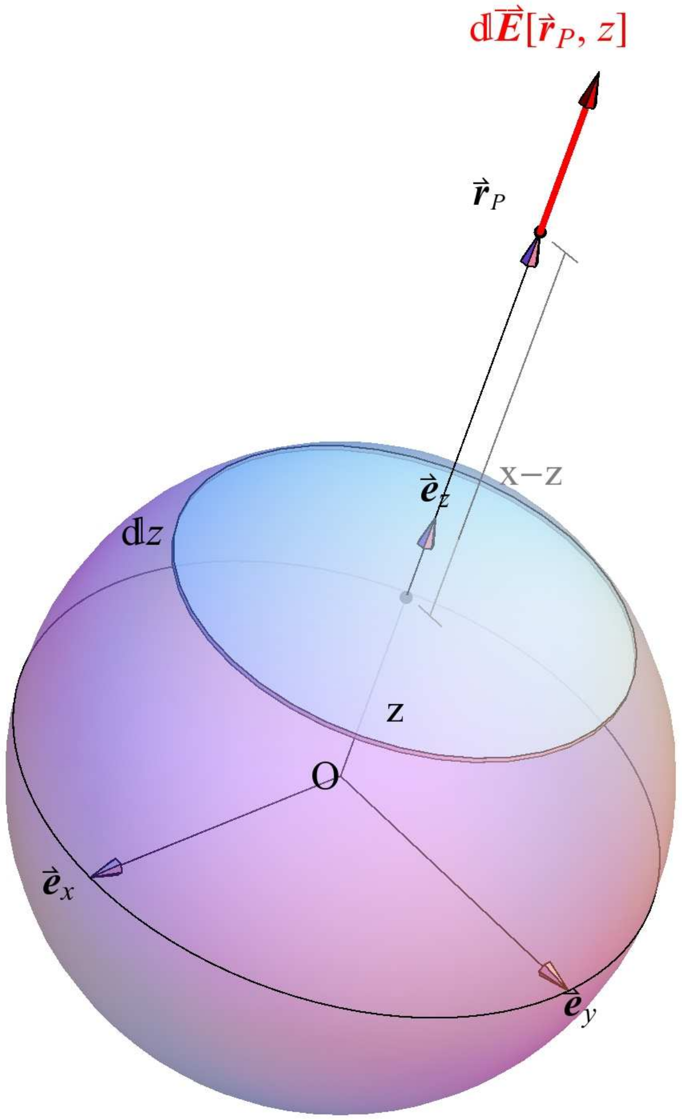
Justifique porque é que o campo em qualquer ponto da superfície de um plano infinito $\mathcal{S}$ com densidade de carga uniforme σ é igual ao do centro de um disco com a mesma densidade de carga, $\vec{E}_\mathcal{S} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{n}$, onde $\vec{n}$ é a normal à superfície do plano.

Explique ainda porque é que, no caso do plano infinito com densidade de carga uniforme σ ,podemos concluir que o campo em qualquer ponto do espaço $\vec{r}$ é igual ao da superfície do plano no mesmo lado em que o ponto está (e portanto constante nesse lado do espaço), $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{n}$.

Serie II, Problema 2.4

Problema 2.4

Uma esfera de raio R tem uma carga eléctrica Q distribuída uniformemente. Calcular o campo eléctrico $\vec{E}$ num ponto P que está a uma distância x do centro da esfera. (Usar o resultado do problema do disco.)



Serie II, Problema 2.4

Solução

- Dada a simetria da esfera, podemos escolher sempre a linha que une $\vec{\boldsymbol{r}}_P$ e o centro da esfera como eixo $\vec{\boldsymbol{e}}_z$.

- A esfera pode ser decomposta em fatias circulares de raio $r[z]$ e espessura dz perpendiculares a $\vec{\boldsymbol{e}}_z$, à distância z do seu centro, cada uma das quais contém uma fracção $dq[z]$ da carga total Q.

- Cada um destes discos gera um campo $d\vec{\boldsymbol{E}}[\vec{\boldsymbol{r}}_P, z]$ no ponto $\vec{\boldsymbol{r}}_P$ sobre o seu eixo, à distância $x - z$ do seu centro, que é dirigido na perpendicular ao disco tal como no problema anterior.

- A soma destas contribuições para todos os $N = \frac{2R}{dz}$ discos que preenchem a esfera é, no limite em que $dz \to 0$, o campo total da esfera em $\vec{\boldsymbol{r}}_P$.

$$\vec{\mathbf{E}}[\vec{\mathbf{r}}_P] \approx \sum_{n=-N/2}^{N/2} d\vec{\mathbf{E}}[\vec{\mathbf{r}}_P, n\, dz] \quad \xrightarrow{dz\to 0} \quad \vec{\mathbf{E}}[\vec{\mathbf{r}}_P] = \int_{-R}^{R} d\vec{\mathbf{E}}[\vec{\mathbf{r}}_P, z]$$

- Como o problema tem simetria esférica, qualquer rotação em torno de um eixo passando pelo ponto P e o centro da esfera não pode alterar o resultado, pelo que o campo é radial e depende apenas da distância x e da direcção $\vec{\boldsymbol{e}}_r = \frac{\vec{\boldsymbol{r}}_P}{|\vec{\boldsymbol{r}}_P|}$.

$$\vec{\mathbf{E}}[\vec{\mathbf{r}}_P] == \frac{1}{\epsilon_o} \frac{Q}{4\pi |\vec{\mathbf{r}}_P|^2} \vec{\mathbf{e}}_r == \frac{1}{\epsilon_o} \frac{Q}{4\pi x^2} \vec{\mathbf{e}}_r$$

Serie II, Problema 2.4

Cargas e posições

- A esfera pode ser dividida em discos de espessura dz perpendiculares ao eixo $\vec{e}_z$ passando pelo centro da esfera e pelo ponto P. Escolhendo a origem no centro da esfera, à cota z corresponde um disco de raio $r[z]$, cujo centro está à distância $x - z$ do ponto P.

$r[z\_] := \sqrt{R^2 - z^2}$; $\qquad \vec{r}_P = x\,\vec{e}_z$;

- A densidade volúmica de carga ρ no caso da distribuição uniforme é simplesmente a carga a dividir pelo volume

$$\rho == \frac{dQ}{dV} \xrightarrow{\text{dist. uniforme}} \rho == \frac{Q}{V_{\text{esf.}}} == \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

- Cada disco destes possui um volume $dV[z] = \pi\, r[z]^2\, dz$ e uma carga $dQ[z] = \rho\, dV[z]$

$$dQ[z\_] := \frac{3Q}{4\pi R^3}\pi\left(R^2 - z^2\right) dz$$

- Cada disco destes à cota z contribui assim com um campo $d\vec{E}\left[\vec{r}_P, z\right]$ para o campo em $\vec{r}_P$ à distância $x - z$ do disco.

$$d\vec{E}\left[\vec{r}_P, z\right] == \frac{dQ[z]}{2\pi\,\epsilon_o\, r[z]^2}\left(1 - \frac{x-z}{\sqrt{r[z]^2 + (x-z)^2}}\right)\vec{e}_z = \frac{3Q}{8\pi\,\epsilon_o\, R^3}\left(1 - \frac{x-z}{\sqrt{R^2 + x^2 - 2xz}}\right)\vec{e}_z\, dz$$

- O campo total é a soma desta contribuições $d\vec{E}\left[\vec{r}_P, z\right]$ para z entre $-R$ e R.

$$\vec{E}[\vec{r}_P] == \int_{-R}^{R} d\vec{E}\left[\vec{r}_P, z\right] == \int_{-R}^{R}\frac{3Q}{8\pi R^3\epsilon_o}\left(1 - \frac{x-z}{\sqrt{R^2 + x^2 - 2xz}}\right)\vec{e}_z\, dz == \frac{1}{\epsilon_o}\,\frac{Q}{4\pi x^2}\,\vec{e}_z$$

Serie II, Problema 2.4

- Cálculo do integral anterior:

NB : $\frac{3Q}{8\pi R^3 \epsilon_0}\int_{-R}^{R}\left(1-\frac{x-z}{\sqrt{R^2+x^2-2xz}}\right)dz\,\vec{e}_z$ *a primeira parte integra − se imediatamente.*;

$\longrightarrow \frac{3Q}{8\pi R^3 \epsilon_0}\left(2R-\int_{-R}^{R}\frac{x-z}{\sqrt{R^2+x^2-2xz}}dz\right)\vec{e}_z$ *o denominador é a derivada dum radical em z .*;

$\longrightarrow \frac{3Q}{8\pi R^3 \epsilon_0}\left(2R+\frac{1}{x}\int_{x+R}^{x-R}(x-z)\,d\left(\sqrt{R^2+x^2-2xz}\right)\right)\vec{e}_z$ $w=\sqrt{R^2+x^2-2xz}$ *varia entre* $x+R$ *e* $x-R$.;

$\longrightarrow \frac{3Q}{8\pi R^3 \epsilon_0}\left(2R+\frac{1}{2x^2}\int_{x+R}^{x-R}(w^2+x^2-R^2)\,dw\right)\vec{e}_z$ *substituindo* $z\to\frac{R^2-w^2+x^2}{2x}$ *no integrando anterior.*;

$\longrightarrow \frac{3Q}{8\pi R^3 \epsilon_0}\left(2R+\frac{1}{2x^2}\left[\frac{w^3}{3}+w\,(x^2-R^2)\right]_{x+R}^{x-R}\right)$
$\vec{e}_z$ *o integral é a diferença entre primitivas do polinómio em w.*;

$\longrightarrow \frac{3Q}{8\pi R^3 \epsilon_0}\left(2R+\frac{2}{3x^2}(R^3-3x^2R)\right)\vec{e}_z$ *expandindo o termo em 2 R cancela.*;

$\longrightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2}\,\vec{e}_z$ *e obtemos o resultado esperado.*;

Este resultado é a Lei de Gauss para a esfera de raio x que passa em $\vec{r}_P$: O fluxo do campo eléctrico através de uma superfície fechada S é sempre igual a $\frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon}$, onde Q_{int} designa a carga interna à superfície e ϵ a permitividade eléctrica do meio.

Serie II, Problema 2.4

- Qualquer rotação $\mathbb{A}$ da esfera em torno do seu centro deixa invariante a distribuição de cargas da esfera, pelo que o campo na posição rodada $\vec{r}_{P'} = \mathbb{A}.\vec{r}_P$ é igual ao campo rodado $\vec{E}[\mathbb{A}.\vec{r}_P] = \mathbb{A}.\vec{E}[\vec{r}_P]$. Isto significa que sobre uma esfera de raio x concêntrica com a da distribuição de carga o campo é radial e de magnitude constante.

  Uma rotação pode ser representada por uma matriz ortogonal real $\mathbb{A}$ (ou seja uma matriz cuja transposta é igual ao seu inverso, $\mathbb{A}^{\mathsf{T}} = \mathbb{A}^{-1}$) com determinante $\det[\mathbb{A}] = 1$.

- Para um campo radial da forma $\vec{E}[\vec{r}] = E_r[r]\,\vec{e}_r[\theta, \varphi]$ o fluxo através de uma esfera centrada na origem é fácil de calcular porque a magnitude do campo é constante sobre a superfície esférica $r = c^{te}$ e a normal à superfície esférica em cada ponto é $\vec{n}[\theta, \varphi] = \vec{e}_r[\theta, \varphi]$.

$$\Phi_{\mathcal{S}}[\vec{\mathbf{E}}] == \oiint_{\mathcal{S}} \vec{\mathbf{E}}[\vec{\mathbf{r}}]\cdot\vec{\mathbf{n}}\,dS[\vec{\mathbf{r}}] == \oiint_{\mathcal{S}} \mathrm{E}_r[x]\,dS[\vec{\mathbf{r}}]$$

- O fluxo $\Phi_{\mathcal{S}}[\vec{E}]$ para uma superfície esférica $\mathcal{S}$ de raio x é calculado simplesmente notando que a área de uma esfera de raio x é $S_x = 4\pi x^2$ e $\mathrm{E}_r[x]$ é constante para $x = c^{te}$.

$$\Phi_{\mathcal{S}}[\vec{\mathbf{E}}] == \mathrm{E}_r[x] \oiint_{\mathcal{S}} dS[\vec{\mathbf{r}}] == \mathrm{E}_r[x]\,S_x == \mathrm{E}_r[x]\,4\pi\,\mathrm{x}^2$$

- ou sabendo que o elemento de área em coordenadas esféricas é $dS[\theta, \varphi] = r^2\,\mathrm{Sin}[\theta]\,d\theta\,d\varphi$, para $r = x$ tem−se

$$\Phi_{\mathcal{S}}[\vec{\mathbf{E}}] == \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{E}_r[x]\,x^2\,\mathrm{Sin}[\theta]\,d\theta\,d\varphi == 4\pi x^2\,\mathrm{E}_r[x]$$

$$\mathrm{E}_r[x] == \frac{\Phi_{\mathcal{S}}[\vec{\mathbf{E}}]}{4\pi x^2} == \frac{\mathrm{Q}/\epsilon_o}{4\pi x^2}$$

Serie II, Problema 2.4

Exercícios

Use as simetrias da distribuição uniforme de cargas na esfera para deduzir a forma geral do seu campo em qualquer ponto do espaço (tal como se fez no problema 2.1).

Se a densidade volúmica de carga variasse apenas com a distância ao centro da esfera, $\rho = \rho[r]$ como é que o campo diferia do caso $\rho = c^{te}$?

Use o teorema de Gauss para deduzir de que forma varia o campo dentro da esfera uniformemente carregada.